

1. (5p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem i e będzie mostem. Pokaż, że e należy do każdego skojarzenia doskonałego lub e nie należy do żadnego skojarzenia doskonałego w G .

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że istnieją dwa skojarzenia doskonałe w G , ozn. M i N , gdzie $e \in M$ i $e \notin N$. Rozważmy graf $H = G[M \Delta N]$, czyli podgraf G indukowany przez krawędzie, które należą do dokładnie jednego z tych skojarzeń. Oczywiście e jest krawędzią w tym grafie.

Skoro M i N są skojarzeniami doskonałymi, każdy wierzchołek v z G jest incydentny z dokładnie jedną krawędzią z M i z dokładnie jedną krawędzią w N . Jeśli te krawędzie są równe, wierzchołek v nie należy do H , a jeśli są różne, wierzchołek v jest w H i ma w nim stopień 2. Podsumowując, graf H jest 2-regularny, czyli każda jego składowa jest cyklem.

Z drugiej strony, skoro e jest mostem w G , jest też mostem w tej składowej H , do której należy. Jest to sprzeczność, bo składowa ta jest cyklem, więc nie ma mostów. \square

2. (5p.) Znajdź wszystkie spójne grafy G takie, że $\Delta(G) > 2$ i $\chi(G) = \chi(G^2)$.

Przypomnijmy, że dla grafu G mamy $G^2 = (V(G), \{uv \mid 0 < \text{dist}_G(u, v) \leq 2\})$.

Rozwiązanie. Pokażemy najpierw, że $\chi(G^2) \geq \Delta(G) + 1$. Niech $v \in V(G)$ będzie wierzchołkiem o największym stopniu w G . Zauważmy, że dowolne dwa wierzchołki w $N(v)$ mają wspólnego sąsiada v , zatem są połączone krawędzią w G^2 . Zatem $N(v) \cup \{v\}$ indukuje klikę w G^2 , skąd mamy $\chi(G^2) \geq \omega(G^2) \geq \Delta(G) + 1$.

Z drugiej strony, wiadomo, że $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Łącząc obie nierówności dostajemy, że

$$\chi(G^2) = \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq \chi(G^2),$$

zatem w szczególności $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Z twierdzenia Brooksa wiemy, że jedyne grafy spójne spełniające tę równość to grafy pełne i cykle nieparzyste. Spośród tych grafów, nierówność $\Delta(G) > 2$ spełniają wyłącznie grafy pełne K_n dla $n \geq 4$. □

3. (5p.) Niech f będzie największym przepływem w sieci $N = (G, c, s, t)$. Wyznacz wartość największego przepływu w sieci $N' = (G, c + f, s, t)$. Przez $c + f$ oznaczamy funkcję przypisującą każdemu łukowi a wartość $c(a) + f(a)$.

Rozwiązanie. Niech $f' : A(G) \rightarrow \mathbb{N}$ będzie funkcją przypisującą każdemu łukowi $a \in A(G)$ wartość $f'(a) = 2f(a)$. Oczywiście f' spełnia warunek Kirchhoffa oraz dla dowolnego łuku $a \in A(G)$ mamy $0 \leq f'(a) = f(a) + f(a) \leq c(a) + f(a)$, zatem jest przepływem w sieci N' . Ponadto, $\text{val}_{N'} f' = 2\text{val}_N f$.

Pokażemy, że f' jest największym przepływem w sieci N' , w tym celu znajdziemy przekrój o przepustowości równej wartości f' . Niech $K = (S, \bar{S})$ będzie najmniejszym przekrojem w sieci N . Wtedy

$$\text{cap}_{N'} K = \sum_{a \in K} (c(a) + f(a)) = \text{cap}_N K + f^+(S) = \text{val}_N f + f^+(S).$$

Wiemy, że skoro K to najmniejszy przekrój, to każda krawędź z \bar{S} do S jest zerowa w f . Zatem $f^-(S) = 0$. Przypomnijmy sobie, że wartość największego przepływu w N wynosi $f^+(S) - f^-(S) = f^+(S)$. Podsumowując, otrzymujemy:

$$\text{cap}_{N'} K = \text{val}_N f + f^+(S) = \text{val}_N f + \text{val}_N f = 2\text{val}_N f = \text{val}_{N'} f'.$$

Zatem, wartość największego przepływu w N' wynosi $2\text{val}_N f$. □

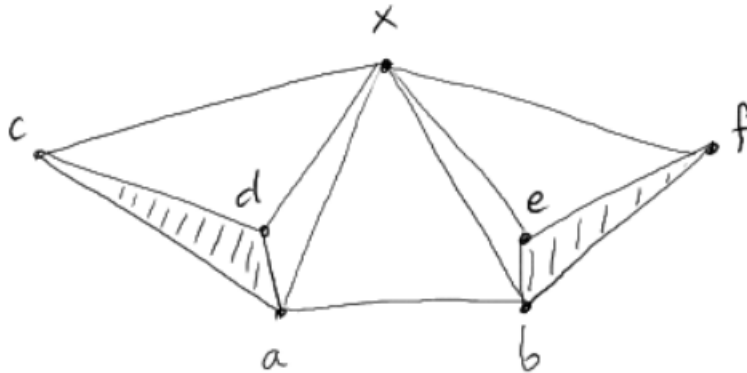
4. (5p.) Niech T będzie drzewem. Wykaż, że graf T^2 jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta(T) \leq 3$.
Przypomnijmy, że dla grafu G mamy $G^2 = (V(G), \{uv \mid 0 < \text{dist}_G(u, v) \leq 2\})$.

Wskazówka: Każde drzewo o największym stopniu co najwyżej 3 jest podgrafem pełnego drzewa binarnego.

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla każdego wierzchołka $v \in V(T)$, domknięte sąsiedztwo $N_T[v]$ tworzy klikę w grafie T^2 . Jeśli zatem w T istnieje wierzchołek stopnia co najmniej 4, to T^2 zawiera klikę K_5 jako podgraf. Wówczas T^2 nie jest planarny na mocy tw. Kuratowskiego.

Zamiast odwrotnej implikacji, udowodnimy silniejsze stwierdzenie: jeśli T jest pełnym drzewem binarnym, to T^2 ma rysunek płaski, w którym korzeń i jego dzieci leżą na brzegu zewnętrznej ściany. Istotnie, wynika stąd teza zadania, ponieważ każde drzewo spełniające warunek $\Delta(T) \leq 3$ jest poddrzewem pełnego drzewa binarnego – wystarczy wziąć za korzeń dowolny liść.

Zastosujemy indukcję względem głębokości T . Dla drzew o głębokości 0 lub 1 teza jest spełniona, bo otrzymany graf T^2 jest izolowanym wierzchołkiem albo trójkątem. Załóżmy, że głębokość T wynosi co najmniej 2. Niech $T(v)$ oznacza drzewo indukowane przez wierzchołek v i jego potomków, dzieci korzenia x oznaczmy przez a, b , a ich dzieci – odpowiednio przez c, d i e, f . Oczywiście $T(a)^2$ (symetrycznie, $T(b)^2$) ma, na mocy założenia indukcyjnego, rysunek płaski, w którym a, c, d (symetrycznie, b, e, f) leżą na brzegu zewnętrznej ściany. Umieśćmy je na płaszczyźnie wraz z wierzchołkiem x i dodajmy krawędzie $ab, xa, xb, xc, xd, xe, xf$ jak na poniższym schemacie, gdzie zakreskowane regiony zawierają rysunki grafów $T(a)^2$ oraz $T(b)^2$.



Ponieważ $V(T^2) = V(T(a)) \cup V(T(b)) \cup \{x\}$ oraz $E(T^2) = E(T(a)^2) \cup E(T(b)^2) \cup \{ab, xa, xb, xc, xd, xe, xf\}$, otrzymaliśmy diagram grafu T^2 , w którym ponadto x, a, b leżą na brzegu zewnętrznej ściany. Dowód jest zakończony. \square