Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	SUMA

1. (4p.) Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem ($|V| > 2$), którego żadne dwa różne wierzchołki stopnia 1 nie mają wspólnego sąsiada. Wykaż, że istnieją $u, v \in V$ takie, że $uv \in E$ oraz $G - \{u, v\}$ jest spójny.

Rozwiązanie. Niech $P = (x_0, \ldots, x_k)$ będzie najdłuższą ścieżką w G. Jeśli $G - \{x_0, x_1\}$ jest grafem spójnym, to zadanie jest rozwiązane. Przyjmijmy zatem, że graf ten jest grafem niespójnym. Istnieje zatem wierzchołek $y \in V - \{x_0, x_1\}$, który w grafie $G - \{x_0, x_1\}$ jest odseparowany od zbioru $\{x_2, \ldots, x_k\}$ oraz y sąsiaduje z jednym z x_0, x_1. Zauważmy też, że gdyby $yx_0 \in E$, to yx_0Px_k byłaby ścieżką w G dłuższą od P, czyli $yx_0 \notin E$ i $yx_1 \in E$. Wierzchołek y jest odseparowany od zbioru $\{x_2, \ldots, x_k\}$, dlatego też y nie ma żadnych sąsiadów na ścieżce P różnych od x_1. Nie ma on też żadnych sąsiadów leżących poza ścieżką P, gdyż gdyby taki sąsiad z istniał, to zyx_1Px_k byłaby ścieżką w G dłuższą od P. Tym samym $\deg_G(y) = 1$. Stąd i z założenia otrzymujemy, iż $\deg_G(x_0) > 1$. Co więcej, za założenia otrzymujemy, że istnieje dokładnie jeden taki wierzchołek y. Ponieważ – jak już zauważyliśmy – x_0 nie ma sąsiadów poza ścieżką P, to istnieje $i > 1$ takie, że $x_0x_i \in E$, ale wtedy $G - \{y, x_1\}$ jest grafem spójnym.

2. (4p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem eulerowskim, a $T = (v_1, \ldots, v_k)$ pewną maksymalną drogą w G. Wykaż, iż $v_1 = v_k$.

Rozwiązanie. Niech $v_k = x$ dla pewnego $x \in V$. Załóżmy, że $v_1 \neq x$. Zauważmy, że jeśli wierzchołek x występuje w drodze T dokładnie q razy, to liczba krawędzi incydentnych z x, przez które przechodzi droga T jest równa $2q - 1$ (dla każdego „wewnętrznego" wierzchołka droga „zabiera" dwie krawędzie i jeszcze jedną dla v_k). Ponieważ G jest grafem eulerowskim, to $\deg_G(x)$ jest liczbą parzystą, a więc istnieje taki sąsiad s wierzchołka x, że przez krawędź xs nie przechodzi droga T. Ale wtedy $(v_1, \ldots, v_k, s)$ jest drogą, co stoi w sprzeczności z maksymalnością drogi T. Otrzymana sprzeczność prowadzi nas do wniosku, że $v_1 = v_k$.

3. (4p.) Niech u, v, będą wierzchołkami grafu G o n wierzchołkach takimi $uv \notin E(G)$ i $\deg u + \deg v \geq n$. Niech G' będzie otrzymany z G przez dodanie krawędzi uv. Pokaż, że G jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy, gdy G' jest hamiltonowski.

Rozwiązanie. ($\rightarrow$) Niech C będzie cyklem Hamiltona w G. Z faktu, że G jest podgrafem G' wynika, że C jest cyklem w G'. Ponieważ $V(G) = V(G')$, cykl C zawiera każdy wierzchołek G' dokładnie raz, zatem G' jest hamiltonowski.

($\leftarrow$) Niech C będzie cyklem Hamiltona w G'. Jeśli C nie zawiera krawędzi uv, to jest to też cykl Hamiltona w G. Przypuśćmy zatem, że krawędź uv występuje na C. Niech P będzie u-v-ścieżką powstałą z C przez usunięcie krawędzi uv. Zauważmy, że P jest ścieżką Hamiltona w G. Oznaczmy $P = (u = p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n = v)$.

Pokażemy, że istnieje $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ takie, że p_i jest sąsiadem v (w G), a p_{i+1} jest sąsiadem u. Przypuśćmy przeciwnie, tj. dla każdego sąsiada v na ściezce P jego następnik na ścieżce nie sąsiaduje z u. Zatem liczba wierzchołków na P, które nie sąsiadują z u wynosi do najmniej $\deg_G v$. Z drugiej strony, ponieważ P jest ścieżką Hamiltona w G, na P jest dokładnie $\deg_G u$ sąsiadów u. Zatem liczba wierzchołków na P równa się:

$$|P| = \underbrace{1}_{\text{wierzchołek } u} + \underbrace{|\{p_i \colon p_i u \in E(G)\}|}_{\text{sąsiedzi } u} + \underbrace{|\{p_i \colon p_i u \notin E(G)\}|}_{\text{niesąsiedzi } u \text{ (poza } u\text{)}} \geq 1 + \deg_G u + \deg_G v.$$

Z założenia wiemy, że $\deg_G u + \deg_G v \geq n$, zatem $|P| \geq n+1$, sprzeczność. Z tego wynika, że istnieją p_i, p_{i+1} takie, że $vp_i \in E(G)$ oraz $up_{i+1} \in E(G)$.

Rozważmy cykl: $C = (u = p_1, p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_n = v, p_i, p_{i-1}, \ldots, p_2, p_1 = u)$. Ponieważ C zawiera wszystkie wierzchołki P, a P jest ścieżką Hamiltona, C jest cyklem Hamiltona w G.

4. (4p.) Dla $k \geq 3$ i $n \geq 4$ niech G będzie grafem k-krytycznym o n wierzchołkach i $\kappa(G) = 2$. Niech S będzie najmniej licznym zbiorem rozcinającym w G. Pokaż, że $G - S$ ma dokładnie dwie spójne składowe.

Rozwiązanie. Po pierwsze zauważmy, że z faktu, że $n \geq 4$ oraz $\kappa(G) = 2$ wynika, że $|S| = 2$, niech $S = \{u, v\}$. Po drugie $uv \notin E(G)$, bo graf krytyczny nie ma rozcinającej kliki (było na ćwiczeniach). Niech $C_1, C_2, \ldots, C_p$ będą składowymi grafu $G \setminus \{u, v\}$. Dla $i = 1, 2, \ldots, p$ przez C'_i zdefinujmy graf indukowany przez zbiór wierzchołków $V(C_i) \cup \{u, v\}$. Ponieważ G jest k-krytyczny, a każdy graf C'_i jest właściwym podgrafem G, wiemy, że $\chi(C'_i) \leq k - 1$ dla każdego i.

Najpierw przypuśćmy, że dla każdego C'_i istnieje $(k-1)$-kolorowanie f_i takie, że $f_i(u) = f_i(v)$, bez straty ogólności załóżmy, że dla każdego i mamy $f_i(u) = f_i(v) = 1$. Wtedy kolorowanie f grafu G zdefiniowane przez $f(u) = f(v) = 1$ oraz $f(w) = f_i(w)$, jeśli wierzchołek w należy do C_i jest poprawnym $(k-1)$-kolorowaniem G, co przeczy temu, że G jest k-krytyczny.

Analogicznie, przypuśćmy, że dla każdego C'_i istnieje $(k-1)$-kolorowanie f_i takie, że $f_i(u) \neq f_i(v)$, bez straty ogólności załóżmy, że dla każdego i mamy $f_i(u) = 1$ oraz $f_i(v) = 2$ (przypomnijmy, że $k \geq 3$). Wtedy kolorowanie f grafu G zdefiniowane przez $f(u) = 1$, $f(v) = 2$ oraz $f(w) = f_i(w)$, jeśli wierzchołek w należy do C_i jest poprawnym $(k-1)$-kolorowaniem G, co przeczy temu, że G jest k-krytyczny.

Zatem istnieją składowe $C_a, C_b \in \{C_1, C_2, \ldots, C_p\}$ takie, że w każdym $(k-1)$-kolorowaniu C'_a wierzchołki u, v dostają ten sam kolor, zaś w każdym $(k-1)$-kolorowaniu C'_b wierzchołki u, v dostają różne kolory.

Rozważmy teraz graf G', który jest podgrafem G indukowanym przez zbiór wierzchołków $V(C_a) \cup V(C_b) \cup \{u, v\}$. Przypuśćmy, że G' ma $(k-1)$-kolorowanie f. Kolorowanie f obcięte do zbioru $V(C_a) \cup \{u, v\}$ jest poprawnym $(k-1)$-kolorowaniem C'_a, zatem $f(u) = f(v)$. Z drugiej strony, kolorowanie f obcięte do zbioru $V(C_b) \cup \{u, v\}$ jest poprawnym $(k-1)$-kolorowaniem C'_b, zatem $f(u) \neq f(v)$. Z tego wynika, że G' nie ma poprawnego $(k-1)$-kolorowania, czyli $\chi(G') \geq k$. Ponieważ G jest k-krytyczny, każdy jego właściwy podgraf ma poprawne $(k-1)$-kolorowanie, czyli $G = G'$. Zatem C_a i C_b są jedynymi składowymi grafu $G - \{u, v\}$.

5. (4p.) Ile wynosi indeks chromatyczny grafu $C_n \square C_m$ $(n, m \geq 3)$ w zależności od wartości n i m? Znajdź optymalne kolorowanie grafu $C_n \square C_m$.

Rozwiązanie. Zbiór wierzchołków C_n oznaczmy przez $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, a zbiór wierzchołków C_m oznaczmy przez $\{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\}$. Krawędzie typu $(u, v)(u', v)$, gdzie $uu' \in E(C_n)$ będziemy nazywali pochodzącymi z C_n, a pozostałe (czyli typu $(u, v)(u, v')$, gdzie $vv' \in E(C_m)$) pochodzącymi z C_m. Zauważmy, że graf $C_n \square C_m$ jest 4-regularny, bo każdy wierzchołek ma dwie krawędzie pochodzące z C_n i dwie krawędzie pochodzące z C_m. Zatem $\Delta(C_n \square C_m) = 4$. Rozważmy następujące przypadki.

Przypadek A: $2|n$**.** Wtedy $\chi'(C_n) = \Delta(C_n)$, z zadania z ćwiczeń mamy $\chi'(C_n \square C_m) = \Delta(C_n \square C_m) = 4$.

Jeśli nie pamiętamy zadania z ćwiczeń, i tak możemy łatwo skonstruować odpowiednie kolorowanie. Znajdźmy dowolne poprawne kolorowanie krawędziowe f cyklu C_m kolorami $\{1, 2, 3\}$ (takie kolorowanie zawsze istnieje, niezależnie od parzystości m). Najpierw pokolorujmy krawędzie $C_n \square C_m$ pochodzące z C_m zgodnie z kolorowaniem f, czyli krawędź $(u, v)(u, v')$ dostaje kolor $f(vv')$. Zauważmy, że w zdefiniowanym dotąd częściowym kolorowaniu żadne dwie krawędzie w jednym kolorze nie są incydentne, wynika to z poprawności kolorowania f.

Rozważmy teraz krawędzie pochodzące z C_n, zauważmy, że tworzą one rozłączne kopie cyklu C_n: dla dowolnego $v \in V(C_m)$ wierzchołki $(u_0, v), (u_1, v), \ldots, (u_{n-1}, v)$ indukują n-wierzchołkowy cykl. Każdy wierzchołek (v, u_i) jest incydentny z dwoma krawędziami pochodzącymi z C_m, czyli „widzi” dokładnie dwa kolory. Co więcej, każdy z tych wierzchołków widzi te same dwa kolory, wynika to ze sposobu, w jaki kolorowaliśmy krawędzie pochodzące z C_m. Niech c będzie kolorem spośród $\{1, 2, 3\}$, którego nie widzi żaden z tych wierzchołków. Kopię cyklu C_n możemy pokolorować kolorami c i 4, jest to możliwe, bo n jest parzyste. Potwarzamy to dla każdego $v \in V(C_m)$. Gwarantuje nam to, że także incydentne krawędzie pochodzące z C_n mają różne kolory. W końcu, ponieważ w każdej kopii grafu C_n użyliśmy wolnego koloru (czyli c) oraz nowego koloru (czyli 4), nie powstały konflikty między krawędziami pochodzącymi z C_n i krawędziami pochodzącymi z C_m.

Przypadek B: $2|m$**.** Jak wyżej $\chi'(C_n \square C_m) = \Delta(C_n \square C_m) = 4$. Ten przypadek jest zupełnie analogiczny do poprzedniego. Nie jest to zaskakujące, bo graf $C_n \square C_m$ jest izomorficzny z $C_m \square C_n$.

Przypadek C: $2 \nmid n$ **i** $2 \nmid m$**.** Niech $k = \chi'(C_n \square C_m)$ i niech c będzie optymalnym kolorowaniem krawędzi $C_n \square C_m$. Oznaczmy przez M_i zbiór krawędzi koloru i w kolorowaniu c. Zbiór ten jest skojarzeniem, czyli oczywiście

$$|M_i| \leq \frac{|V(C_n \square C_m)|}{2} = \frac{n \cdot m}{2}.$$

Ponieważ n i m są nieparzyste otrzymujemy $|M_i| \leq \frac{n \cdot m - 1}{2}$. Stąd

$$|E(C_n \square C_m)| = \sum_{i=1}^{k} |M_i| \leq \frac{n \cdot m - 1}{2} \cdot k.$$

Ponieważ $|E(C_n \square C_m)| = 2nm$ (przypomnijmy, że $C_n \square C_m$ jest 4-regularny), otrzymujemy

$$2nm \leq \frac{n \cdot m - 1}{2} \cdot k \quad \text{czyli} \quad 4nm \leq k \cdot n \cdot m - k.$$

Stąd $k \geq 5 = \Delta(C_n \square C_m) + 1$. Z tw. Vizinga $k \leq \Delta(C_n \square C_m) + 1$, więc ostatecznie

$$\chi'(C_n \square C_m) = k = \Delta(C_n \square C_m) + 1 = 5.$$