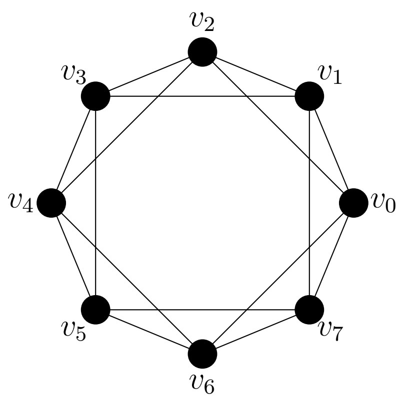
Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	SUMA

1. (5p.) Niech $n > 2k > 0$. Niech $H_{n,k}$ będzie grafem takim, że $V(H_{n,k}) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, a $E(H_{n,k}) = \{v_i v_{i+j} : i \in \{0, 1 \ldots, n-1\} \wedge j \in [k]\}$ (dodawanie wykonujemy modulo n). Wyznacz $\kappa(H_{n,k})$.

Rozwiązanie. Na początku narysujmy przykładowy graf $H_{8,2}$.



Wykażemy, że $\kappa(H_{n,k}) = 2k$. Po pierwsze zauważmy, że dla dowolnego i wierzchołek v_i sąsiaduje jedynie z wierzchołkami $v_{i+1}, \ldots, v_{i+k}, v_{i-1}, \ldots, v_{i-k}$ (działania $+$ i $-$ w indeksach wykonujemy modulo n). Dzięki założeniu, że $n > 2k$ wierzchołki te są parami różne, a więc stopień każdego wierzchołka wynosi $2k$. To oznacza, że $\kappa(H_{n,k}) \leq \delta(H_{n,k}) = 2k$.

Aby wykazać, że $\kappa(H_{n,k}) \geq 2k$ pokażemy, że dla dowolnego $A \subseteq V(H_{n,k})$ takiego, że $|A| < 2k$ graf $H_{n,k} - A$ jest spójny. Niech v_i i v_j będą dowolnymi wierzchołkami grafu $H_{n,k} - A$. W grafie $H_{n,k}$ ciągi $P = v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j$ oraz $Q = v_i, v_{i-1}, \ldots, v_{j+1}, v_j$ odpowiadają dwóm, wewnętrznie rozłącznym, v_i-v_j-ścieżkom. Niech P' i Q' będą podciągami ciągów P i Q, odpowiednio, złożonymi z wierzchołków należących do zbioru $V(H_{n,k}) - A$. Kiedy ciąg P' nie odpowiada ścieżce? Wtedy, gdy w stosunku do ciągu P zniknęło k kolejnych wierzchołków. To samo można powiedzieć o ciągu Q'. Ale ponieważ $|A| < 2k$ oraz P i Q są wewnętrznie rozłączne, to z przynajmniej jednego z ciągów P lub Q zniknęło po usunięciu zbioru A mniej niż k wierzchołków ogółem, a zatem tym bardziej nie zniknęło k kolejnych wierzchołków. Tym samym co najmniej jeden z ciągów P' lub Q' odpowiada v_i-v_j-ścieżce w grafie $H_{n,k} - A$. Z dowolności wyboru wierzchołków v_i i v_j wynika, że graf $H_{n,k}$ jest spójny, czyli $\kappa(H_{n,k}) \geq 2k$ $\square$

2. (5p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem eulerowskim bez wierzchołków izolowanych takim, że $|V|$ jest nieparzyste oraz $\Delta(G) < |V|/2$. Wykaż, że graf $\overline{G}$ jest eulerowski.

Rozwiązanie. Zastosujemy twierdzenie Eulera. Po pierwsze zauważmy, że dla dowolnego $v \in V$ mamy $\deg_{\overline{G}}(v) = |V| - 1 - \deg_G(v)$. Skoro G jest eulerowski, to $\deg_G(v)$ jest parzyste, a skoro $|V|$ jest nieparzyste, to $|V| - 1$ jest parzyste. Stąd stopień dowolnego wierzchołka grafu $\overline{G}$ jest parzysty.

Pozostaje wykazać, że $\overline{G}$ jest grafem spójnym. Niech $u \neq v$ będą dowolnymi wierzchołkami grafu $\overline{G}$. Jeśli $uv \notin E$, to wierzchołki u i v sąsiadują w grafie $\overline{G}$. Jeśli $uv \in E$, to $N_{\overline{G}}(u) \cup N_{\overline{G}}(v) \subseteq V - \{u, v\}$, a więc

$$|N_{\overline{G}}(u) \cup N_{\overline{G}}(v)| = |N_{\overline{G}}(u)| + |N_{\overline{G}}(v)| - |N_{\overline{G}}(u) \cap N_{\overline{G}}(v)|$$

Zatem mamy

$$\begin{aligned}
|N_{\overline{G}}(u) \cap N_{\overline{G}}(v)| =& |N_{\overline{G}}(u)| + |N_{\overline{G}}(v)| - |N_{\overline{G}}(u) \cup N_{\overline{G}}(v)| \geq \\
\geq& |V| - 1 - \deg_G(u) + |V| - 1 - \deg_G(v) - (|V| - 2) = \\
=& 2|V| - 2 - (\deg_G(u) + \deg_G(v)) - |V| + 2 = \\
=& |V| - (\deg_G(u) + \deg_G(v)) > |V| - \left(\frac{|V|}{2} + \frac{|V|}{2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z założenia, że $\Delta(G) < |V|/2$.

Konkluzja jest taka, że wierzchołki u i v mają w grafie $\overline{G}$ wspólnego sąsiada, więc istnieje w nim u-v-ścieżka. Z dowolności wyboru wierzchołków u i v wnioskujemy, że $\overline{G}$ jest grafem spójnym, zatem jest on eulerowski. $\square$

3. (5p.) Niech G będzie grafem o n wierzchołkach, gdzie $n \geq 3$. Udowodnij, że jeśli G ma co najmniej $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ krawędzie, to G jest hamiltonowski.

Rozwiązanie. Weźmy dowolne dwa różne wierzchołki u, v takie, że $uv \notin E(G)$ (jeśli nie ma takiej pary, to graf jest pełny, więc jest hamiltonowski). Rozważmy graf $G' = G - u - v$. Zauważmy, że $|E(G)| = |E(G')| + \deg_G u + \deg_G v$. Graf G' ma $n-2$ wierzchołki zatem $|E(G')| \leq \binom{n-2}{2}$. Otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2 \leq |E(G)| = |E(G')| + \deg_G u + \deg_G v \leq \binom{n-2}{2} + \deg_G u + \deg_G v.$$

Zatem:

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-\binom{n-2}{2} \leq \deg_G u + \deg_G v.$$

Przekształcając lewą stronę równania otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-\frac{1}{2}(n-2)(n-3) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1-n+3)+2 = \frac{1}{2}(n-2)\cdot 2+2 = n-2+2 = n.$$

Pokazaliśmy, że dla dowolnej pary niesąsiadujących wierzchołków u, v zachodzi:

$$n \leq \deg_G u + \deg_G v.$$

Z twierdzenia Orego, graf G jest hamiltonowski. $\square$

4. (5p.) Scharakteryzuj (czyli znajdź) wszystkie drzewa T o co najmniej dwóch wierzchołkach, dla których $\chi'(T) = \Delta(T)$.

Rozwiązanie. Pokażemy, że każde drzewo ma taką własność. Oczywiście zawsze $\chi'(T) \geq \Delta(T)$, zatem pozostaje pokazać, że każde drzewo T ma poprawne kolorowanie krawędziowe na $\Delta(T)$ kolorów. Dowód będzie indukcyjny po liczbie wierzchołków. Jeśli $|T| = 2$, to T jest izomorficzny z K_2, zatem $\chi'(T) = 1 = \Delta(T)$.

Załóżmy zatem, że $|T| \geq 3$ i dla każdego drzewa T' o mniej niż $|T|$ wierzchołkach zachodzi $\chi'(T') = \Delta(T')$.

Z ćwiczeń wiemy, że każde drzewo o co najmniej dwóch wierzchołkach ma liść, niech v będzie liściem w T, a u będzie jego sąsiadem. Zauważmy, że graf $T' = T - v$ jest drzewem, zatem z założenia indukcyjnego ma poprawne kolorowanie krawędziowe f' na $\Delta(T')$ kolorów. Aby znaleźć kolorowanie f grafu T, musimy rozszerzyć f', kolorując krawędź uv.

Zauważmy, że $\deg_{T'} u = \deg_T u - 1$, a dla wszystkich pozostałych wierzchołków ich stopnie są takie same w T i T'. Zatem $\Delta(T') \in \{\Delta(T) - 1, \Delta(T)\}$. Rozważmy dwa przypadki.

Jeśli $\Delta(T') = \Delta(T)$, to wierzchołek u nie może mieć w T' największego stopnia. Zatem istnieje co najmniej jeden kolor c taki, że u nie jest incydentny z krawędzią w kolorze c (w grafie T' i kolorowaniu f'). Możemy zatem użyć tego koloru, by pokolorować krawędź uv, tym samym otrzymując poprawne kolorowanie krawędziowe grafu T na $\Delta(T') = \Delta(T)$ kolorów.

Jeśli $\Delta(T') = \Delta(T) - 1$, to możemy rozszerzyć kolorowanie f' przez pokolorowanie krawędzi uv nowym kolorem. Liczba użytych kolorów wyniesie zatem $\Delta(T') + 1 = \Delta(T)$. $\square$