Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	SUMA

1. (5p.) Wykaż, że graf $G = (V, E)$ ($|V| \geqslant 3$) jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych trzech jego wierzchołków x, y i z istnieje x-y-ścieżka przechodząca przez z.

Rozwiązanie. Załóżmy na początku, że graf G jest 2-spójny. Niech x, y i z będą jego trzema dowolnymi wierzchołkami. Połóżmy $U := \{x, y\}$. Jak wiemy z ćwiczeń, w G istnieje z-U-wachlarz. Niech P i Q będą ścieżkami tego wachlarza, gdzie P jest z-x-ścieżką, a Q jest z-y-ścieżką. Z definicji wachlarza wynika, że $xPzQy$ jest ścieżką w G. Prowadzi ona z x do y przez z, więc spełnia żądane warunki.

Alternatywne rozwiązanie może polegać na przykład na znalezieniu cyklu C przechodzącego przez x i z (taki istnieje z 2-spójności grafu) oraz ścieżki łączącej wierzchołek y z $V(C) \setminus \{x\}$.

Teraz załóżmy, że dla każdych trzech wierzchołków x, y i z grafu G istnieje x-y-ścieżka przechodząca przez z. Chcemy wykazać, że G jest 2-spójny. Ponieważ $|V| \geqslant 3$, wystarczy pokazać, że usunięcie dowolnego wierzchołka nie powoduje rozspójnienia grafu. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem grafu G, a wierzchołki u i w dwoma dowolnymi wierzchołkami grafu $G - v$. Z założenia w grafie G jest v-w-ścieżka P przechodząca przez u. Stąd uPw jest ścieżką w G, która nie przechodzi przez v, a zatem jest u-w-ścieżką w $G - v$. Ponieważ u i w były wybrane dowolnie, to oznacza to, że $G - v$ jest spójny. W konsekwencji G jest 2-spójny. $\square$

2. (5p.) Przypomnijmy, że *średnicą* grafu $G = (V, E)$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{diam}(G) := \max\{\operatorname{dist}_G(u, v) : u, v \in V\},$$

gdzie $\operatorname{dist}_G(u, v)$ oznacza liczbę krawędzi na najkrótszej u-v ścieżce. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem eulerowskim o nieparzystej liczbie wierzchołków i średnicy większej lub równej 3. Wykazać, że dopełnienie $\overline{G}$ grafu G również jest grafem eulerowskim.

Rozwiązanie. Niech $v \in V$. Ponieważ G jest eulerowski, wiemy, że $\deg_G v$ jest liczbą parzystą. Jak wiadomo $\deg_{\overline{G}} v = |V| - 1 - \deg_G v$, co jest liczbą parzystą, jako że $|V|$ jest nieparzyste, a $\deg_G v$ parzyste. Ponieważ wierzchołek v był wybrany dowolnie, to właśnie udowodniliśmy, że wszystkie wierzchołki grafu $\overline{G}$ mają parzyste stopnie.

Jeśli wykażemy jeszcze, że graf $\overline{G}$ jest spójny, to z twierdzenia Eulera otrzymamy tezę zadania.

Skoro średnica grafu G jest równa co najmniej 3, to w G istnieją wierzchołki x i y, które są odległe o co najmniej 3, a więc nie sąsiadują ze sobą w grafie G, ani nie mają w nim wspólnego sąsiada. Niech teraz $u, v \in V$ będą dowolnymi wierzchołkami. Wierzchołek u nie może sąsiadować w G z oboma wierzchołkami x i y, a więc co najmniej jedna z krawędzi ux, uy jest w $\overline{G}$. To samo możemy powiedzieć dla wierzchołka v. Jeśli $ux, vx \in E(\overline{G})$ lub $uy, vy \in E(\overline{G})$, to uxv lub uyv jest uv-ścieżką w $\overline{G}$. A jeśli $ux \in E(\overline{G})$, a $vy \in E(\overline{G})$ (lub na odwrót), to $uxyv$ jest uv-ścieżką w $\overline{G}$ (lub $uyxv$). (Literalnie to działa tylko jeśli $u, v \notin \{x, y\}$, ale jak tylko umówimy się, że gdy powiedzmy $u = x$, to $uxyv$ czytamy uyv, to wszystko jest dobrze.) $\square$

3. (5p.) Niech G będzie grafem, który spełnia warunek $\delta(G) \geq k$ i nie ma trójkątów (czyli każdy cykl ma co najmniej cztery krawędzie). Pokaż, że w G istnieje ścieżka o co najmniej $2k$ wierzchołkach.

Rozwiązanie. Rozważmy najdłuższą ścieżkę w G, oznaczmy ją przez $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$. Zauważmy, że każdy sąsiad v_1 znajduje się na P. Co więcej, dla każdego $i \in \{2, 3, \ldots, \ell - 1\}$, jeśli v_i jest sąsiadem v_1, to v_{i+1} nie jest, bo inaczej wierzchołki v_1, v_i, v_{i+1} tworzą trójkąt.

Policzmy zatem wierzchołki na P:

$$\ell \geq \underbrace{1}_{\text{wierzch. } v_1} + \underbrace{k}_{\text{sąsiedzi } v_1} + \underbrace{k-1}_{\text{następnicy sąsiadów } v_1\text{, poza ew. } v_\ell} = 2k.$$

Zatem najdłuższa ścieżka w G ma co najmniej $2k$ wierzchołki. $\square$

4. (5p.) Niech $k \geq 2$ i niech G będzie k-regularnym grafem o parzystej liczbie wierzchołków w którym $\chi'(G) = k + 1$. Dla danej krawędzi $uv \in E(G)$ definiujemy graf G_{uv} w następujący sposób:

$$G_{uv} := (V(G) \cup \{x\}, E(G) \setminus \{uv\} \cup \{ux, vx\}).$$

Innymi słowy, krawędź uv zastępujemy ścieżką uxv, gdzie x jest nowym wierzchołkiem. Pokaż, że dla każdego $uv \in E(G)$ zachodzi $\chi'(G_{uv}) = k + 1$.

Rozwiązanie. Ustalmy $uv \in E(G)$ i niech $n := |V(G)|$. Wiemy, że $|V(G_{uv})| = n + 1$, zauważmy, że $\Delta(G) = \Delta(G_{uv}) = k$.

Załóżmy, że G_{uv} ma poprawne k-kolorowanie krawędziowe. Żeby kolorowanie było poprawne, liczba krawędzi grafu G_{uv} w jednym kolorze nie może przekraczać $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$. W przeciwnym wypadku, tzn. jeśli istnieje kolor przyporządkowany co najmniej $\frac{n}{2} + 1$ krawędziom, G_{uv} musiałby posiadać co najmniej $2 \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) = n + 2$ wierzchołki.

Ponieważ mamy do dyspozycji k kolorów, możemy oszacować

$$|E(G_{uv})| \leq k \cdot \frac{n}{2}. \tag{1}$$

Zauważmy jednak, że graf G posiada dokładnie $\frac{kn}{2}$ krawędzi (ponieważ ma n wierzchołków i jest k-regularny). Graf G_{uv} powstał przez usunięcie krawędzi uv i dodanie krawędzi vx i ux, co oznacza, że $|E(G_{uv})| = \frac{kn}{2} + 1$, co daje sprzeczność z (1). Wobec tego nie istnieje poprawne kolorowanie krawędzi grafu G_{uv} na k' kolorów dla żadnego $k' \leq k$. Z tego dostajemy, że $\chi'(G_{uv}) \geq k + 1$. Ponieważ $\Delta(G_{uv}) = k$, z twierdzenia Vizinga wiemy natomiast, że $\chi'(G_{uv}) \leq k + 1$, zatem dostajemy, że $\chi'(G_{uv}) = k + 1$.

Początkową krawędź uv wybraliśmy w dowolny sposób, więc powyższy argument działa dla każdej możliwej krawędzi grafu G. $\square$