1. (5p.) Niech G będzie grafem 3-spójnym. Pokaż, że dla każdej pary różnych wierzchołków u, v istnieje cykl parzysty (tj. cykl o parzystej liczbie krawędzi), który zawiera u i v.

Przypomnijmy, że na cyklu wierzchołki się nie powtarzają, z dokładnością do tego, że cykl zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku.

Rozwiązanie. Z twierdzenia Mengera wiemy, że w grafie G istnieją trzy wewnętrznie rozłączne u-v-ścieżki. Z zasady szufladkowej wiemy, że spośród nich możemy wybrać dwie, które mają taką samą parzystość. Zauważmy teraz, że konkatenacja tych ścieżek (czyli sklejenie ich odpowiednimi końcami) daje cykl o parzystej liczbie krawędzi, który zawiera u i v. $\square$

2. (5p.) Niech $n, m > 1$. Rozważmy graf $G_{n,m}$, którego wierzchołkami są wszystkie ciągi długości n o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$, a dwa ciągi sąsiadują, gdy różnią się dokładnie jednym wyrazem. Wyznacz średnicę $\mathrm{diam}(G_{n,m})$ grafu $G_{n,m}$ oraz wartości n i m, dla których graf $G_{n,m}$ jest eulerowski.

Przypomnijmy, że $\mathrm{diam}(G) := \max\{\mathrm{dist}_G(u, v) : u, v \in V(G)\}$, gdzie $\mathrm{dist}_G(u, v)$ oznacza liczbę krawędzi na najkrótszej ścieżce o końcach w wierzchołkach u i v.

Rozwiązanie. Zauważmy, że odległość między wierzchołkami w rozważanym grafie jest równa liczbie wyrazów, którymi różnią się te wierzchołki, czyli jest równa co najwyżej n. Dzięki założeniu, że $m > 1$ istnieją ciagi, które różnią się wszystkimi wyrazami, co oznacza, że $\mathrm{diam}(G_{n,m}) = n$.

Rozważania dotyczące średnicy grafu $G_{n,m}$ upewniają nas, że dla każdego wyboru parametrów $n, m > 1$ taki graf jest spójny. Aby stwierdzić, które z nich są eulerowskie wystarczy zbadać stopnie ich wierzchołków. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem grafu $G_{n,m}$, a w jego sąsiadem. Wierzchołek w różni się od v na jednej z n pozycji i na tej pozycji może mieć jeden z $m - 1$ wyrazów. Zatem wierzchołek w możemy wybrać na $n(m - 1)$ sposobów, a zatem $\deg_{G_{n,m}}(v) = n(m - 1)$. Wynik ten nie zależy od wierzchołka v, a zatem graf $G_{n,m}$ jest $n(m - 1)$-regularny. Stąd i z twierdzenia Eulera wnioskujemy, że graf $G_{n,m}$ jest eulerowski, chyba że n jest nieparzyste, a m parzyste. $\square$

3. (5p.) Niech G będzie grafem prostym (bez pętli i wielokrotnych krawędzi). Powiemy, że $v_1, v_2 \in V(G)$ są *bliźniakami*, jeśli $N_G(v_1) = N_G(v_2)$ (czyli v_1 i v_2 mają ten sam zbiór sąsiadów w G). Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem grafu G (można założyć, że $|V(G)| > 1$) i niech $B_G(v)$ oznacza zbiór bliźniaków wierzchołka v w G (w szczególności $v \in B_G(v)$). Pokaż, że jeśli $|B_G(v)| > \deg_G v$, to G nie jest hamiltonowski.

Rozwiązanie. Załóżmy przeciwnie, tzn. że graf G ma cykl Hamiltona. Wiemy z wykładu, że wówczas dla każdego niepustego zbioru $S \subseteq V(G)$ zachodzi $\mathcal{C}(G \setminus S) \leqslant |S|$, gdzie $\mathcal{C}(G \setminus S)$ oznacza liczbę spójnych składowych grafu $G \setminus S$. Oznaczmy przez G' graf $G \setminus N_G(v)$. Możemy założyć, że $N_G(v) \neq \emptyset$, w przeciwnym wypadku G jest niespójny. Zatem

$$\mathcal{C}(G') \leqslant |N_G(v)| = \deg_G v < |B_G(v)|. \tag{1}$$

Zauważmy, że $B_G(v) \subseteq V(G')$. W przeciwnym wypadku oznaczałoby to, że istnieje $u \in B_G(v)$, który należy także do $N_G(v)$. Ale skoro $u \in B_G(v)$, to $N_G(v) = N_G(u)$, więc $u \in N_G(u)$, sprzeczność z faktem, że wierzchołki G nie mają pętli.

Zauważmy również, że każdy wierzchołek $u \in B_G(v)$ jest wierzchołkiem izolowanym w G', ponieważ G' powstał z grafu G przez usunięcie zbioru $N_G(v) = N_G(u)$. Każdy izolowany wierzchołek jest spójną składową grafu G', więc $\mathcal{C}(G') \geqslant |B_G(v)|$, sprzeczność z (1). $\square$

4. (5p.) Niech $p, q > 0$ i niech G, H będą grafami o nieparzystych liczbach wierzchołków, takimi że G jest p-regularny, a H jest q-regularny. Wyznacz $\chi'(G\Box H)$.

Przypomnijmy, że $V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$ i $E(G\Box H) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : u_1 = v_1 \text{ i } u_2v_2 \in E(H) \text{ lub } u_1v_1 \in E(G) \text{ i } u_2 = v_2\}$.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że dla dowolnego wierzchołka $(u, v) \in V(G\Box H)$, zbiór jego sąsiadów można podzielić na dwa rozłączne podzbiory: wierzchołki (u, w), gdzie $vw \in E(H)$ oraz wierzchołki (z, v), gdzie $uz \in E(G)$. Zatem zachodzi $\deg_{G\Box H}(u, v) = \deg_G u + \deg_H v$, co z kolei implikuje, że graf $G\Box H$ jest $(p+q)$-regularny. Ponadto liczba wierzchołków grafu $G\Box H$ to $|V(G)|\cdot|V(H)|$, więc jest to liczba nieparzysta.

Z zadania z ćwiczeń wiemy, że indeks chromatyczny każdego grafu k-regularnego o nieparzystej liczbie wierzchołków wynosi $k + 1$, co natychmiast implikuje, że $\chi'(G\Box H) = p + q + 1$

Aby rozwiązanie było kompletne, przedstawmy argument tutaj. Załóżmy, że $\chi'(G\Box H) \leqslant p + q$ i ustalmy pewne poprawne $(p + q)$-kolorowanie krawędziowe grafu $G\Box H$. Ponieważ dowolny wierzchołek v w grafie $G\Box H$ ma stopień $p + q$, to v jest incydentny z dokładnie jedną krawędzią w każdym z kolorów. Zatem krawędzie w jednym kolorze muszą tworzyć skojarzenie, które zawiera wszystkie wierzchołki grafu $G\Box H$. Zauważmy jednak, że każde skojarzenie zawiera parzystą liczbę wierzchołków, a $G\Box H$ ma nieparzystą liczbę wierzchołków – sprzeczność! Zatem $\chi'(G\Box H) > p + q$, a z tw. Vizinga mamy $\chi'(G\Box H) \leqslant p + q + 1$, więc ostatecznie $\chi'(G\Box H) = p + q + 1$. $\Box$