Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	SUMA

1. (5p.) Skojarzenie M w grafie $G = (V, E)$ nazwiemy *maksymalnym*, jeśli $(\forall e \in E - M)$ $M \cup \{e\}$ nie jest skojarzeniem w G.

Niech $b(G) := \min\{|M| : M$ jest skojarzeniem maksymalnym w $G\}$. Wyznacz $b(C_n)$.

Rozwiązanie. Ponumerujmy krawędzie $e_0, \ldots, e_{n-1}$ cyklu po kolei (od zera, bo będziemy rachować modulo n). Niech M będzie dowolnym skojarzeniem maksymalnym w grafie C_n. Niech $m_i := |M \cap \{e_{i-1}, e_i, e_{i+1}\}|$, czyli m_i to liczba krawędzi spośród trzech kolejnych, zaczynających się od e_{i-1}, które należą do skojarzenia M. Skoro skojarzenie M jest maksymalne, to $(\forall i)$ $m_i \geqslant 1$, bo inaczej, gdyby $m_j = 0$ dla pewnego j, to mielibyśmy trzy kolejne krawędzie cyklu, z których żadna nie należy do M i zbiór $M \cup \{e_j\}$ byłby skojarzeniem w C_n przecząc temu, że M jest skojarzeniem maksymalnym. Zauważmy też, że $|M| = \sum_{i=0}^{n-1} m_i/3$, co wynika z tego, że w sumie każda krawędź skojarzenia M jest liczona dokładnie trzy razy. Łącząc te fakty otrzymujemy

$$|M| = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} m_i}{3} \geqslant \frac{\sum_{i=0}^{n-1} 1}{3} = \frac{n}{3},$$

czyli że każde skojarzenie maksymalne w C_n ma co najmniej $n/3$ krawędzi, co można dokładniej powiedzieć, że ma ono co najmniej $\lceil n/3 \rceil$ krawędzi. Mamy $b(C_n) \geqslant \lceil n/3 \rceil$.

Jeśli $3|n$, to zbiór $\{e_{3k} : 0 \leqslant k \leqslant n/3 - 1\}$ jest skojarzeniem maksymalnym w C_n. Jeśli n daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3, to $\{e_{3k} : 0 \leqslant k \leqslant (n-1)/3 - 1\} \cup \{e_{n-2}\}$ jest skojarzeniem maksymalnym w C_n. W końcu, gdy n daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to $\{e_{3k} : 0 \leqslant k \leqslant (n-2)/3 - 1\} \cup \{e_{n-2}\}$ jest skojarzeniem maksymalnym w C_n. Ponieważ każdy z tych trzech zbiorów ma liczność $\lceil n/3 \rceil$, to mamy $b(C_n) \leqslant \lceil n/3 \rceil$.

Łącząc obie nierówności dostajemy $b(C_n) = \lceil n/3 \rceil$

2. (5p.) Wykaż, że graf dwudzielny $G = (V, E)$ ma skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall S \subseteq V)\ |N(S)| \geqslant |S|.$$

Rozwiązanie. Załóżmy na początek, że M jest skojarzeniem doskonałym w G. Oznaczmy przez v' wierzchołek skojarzony z v w M. Niech $S \subseteq V$. Niech $S' := \{v' : v \in S\}$. Mamy $|S'| = |S|$ oraz $S' \subseteq N(S)$. Stąd $|N(S)| \geqslant |S|$.

Załóżmy teraz, że $(\forall S \subseteq V)\ |N(S)| \geqslant |S|$. Oznaczmy przez X i Y klasy dwudzielności grafu G. Mamy $(\forall S \subseteq X)\ |N(S)| \geqslant |S|$. Z twierdzenia Halla wnioskujemy, że istnieje w G skojarzenie M_X pokrywające zbiór X. Oznacza to, że $|X| \leqslant |Y|$. Mamy też, że $(\forall S \subseteq Y)\ |N(S)| \geqslant |S|$, co oznacza, znowu z twierdzenia Halla, że istnieje w G skojarzenie M_Y pokrywające zbiór Y, co pociąga za sobą, iż $|Y| \leqslant |X|$. Wiemy już teraz, że $|X| = |Y|$, ale to oznacza, że skojarzenie M_X jest doskonałe (M_Y też).

3. (5p.) Niech G będzie spójnym grafem o zbiorze wierzchołków $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.
Sieć N definiujemy następująco:

- zbiorem wierzchołków N będzie $V(G)$ i dwa nowe wierzchołki: źródło s i ujście t,
- dla każdej krawędzi $\{v_i, v_j\}$ grafu G dodajemy do N łuki v_iv_j i v_jv_i, mają one nieskończone przepustowości,
- dodajemy do N łuki od s do wszystkich wierzchołków z G, przy czym $c(sv_i) = i$,
- dodajemy do N łuki od wszystkich wierzchołków z G do t, przy czym $c(v_it) = n - i + 1$.

Wyznacz wartość największego przepływu w N.

Rozwiązanie. Wartość maksymalnego przepływu jest równa przepustowości minimalnego przekroju, rozważamy więc przekroje (S, T), gdzie $T = V(N) \setminus S$.

Zauważmy, że przekrój $(\{s\}, V(G) \cup \{t\})$ ma wartość $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Z drugiej strony każdy przekrój zawierający krawędź v_iv_j (dla $v_i, v_j \in V(G)$) ma nieskończoną przepustowość, zatem nie może być minimalny.

Pokażemy, że w minimalnym przekroju (S, T) mamy $V(G) \subseteq S$ lub $V(G) \subseteq T$. Przypuśćmy przeciwnie, tj. istnieją $a, b \in V(G)$ takie, że $a \in S$ i $b \in T$. Ponieważ G jest spójny, istnieje w G ścieżka P o końcach a i b. Niech a' będzie ostatnim wierzchołkiem P, należącym do S, a b' następnym wierzchołkiem na P. Oczywiście $b' \in T$, czyli krawędź $a'b'$ należy do przekroju (S, T). Z tego wynika, że przekrój ten nie może być minimalny.

Istnieją tylko dwa przekroje (S, T), które mają wszystkie wierzchołki grafu G w jednym ze zbiorów S i T. Przepustowość przekroju $(\{s\} \cup V(G), \{t\})$ wynosi $\sum_{i=1}^{n}(n - i + 1) = n + (n - 1) + ... + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$. Przepustowość przekroju $(\{s\}, V(G) \cup \{t\})$ wynosi $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Obie wartości są sobie równe. Stąd wartość maksymalnego przepływu wynosi $\frac{n(n+1)}{2}$.

4. (5p.) Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach. Niech s oznacza liczbę wierzchołków stopnia co najwyżej 6. Pokaż, że $n \leq 7s$.

Rozwiązanie. Niech S będzie zbiorem wierzchołków stopnia co najwyżej 6. Oznaczmy $R = V \setminus S$ i $r = |R|$. Przypuśćmy, że teza jest fałszywa, czyli $n > 7s$, co oznacza, że $r > 6s$.

Z lematu o uściskach dłoni otrzymujemy:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{v \in S} \deg v + \sum_{v \in R} \deg v > \sum_{v \in R} \deg v \geq 7r = r + 6r$$

Stosując założenie, otrzymujemy $2|E| > 6s + 6r = 6n$. Z drugiej strony wiemy, że w grafie planarnym $2|E| < 6n$, sprzeczność.