Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	SUMA

1. (5p.) *Pokryciem wierzchołkowym* w grafie G nazywamy zbiór $S \subseteq V(G)$ taki, że każda krawędź z G ma co najmniej jeden koniec w S. Niech $\gamma(G)$ oznacza rozmiar najmniejszego pokrycia wierzchołkowego w G, a $\mu(G)$ oznacza rozmiar największego skojrzenia w G. Pokaż, że dla każdego grafu G mamy $\mu(G) \leq \gamma(G) \leq 2\mu(G)$.

Rozwiązanie. Niech M będzie skojarzeniem w G rozmiaru $\mu(G)$, a S będzie pokryciem wierzchołkowym rozmiaru $\gamma(G)$. Zauważmy, że S musi zawierać przynajmniej jeden koniec każdej krawędzi z M, a ponieważ krawędzie z M są rozłączne, otrzymujemy, że $\mu(G) = |M| \leq |S| = \gamma(G)$.

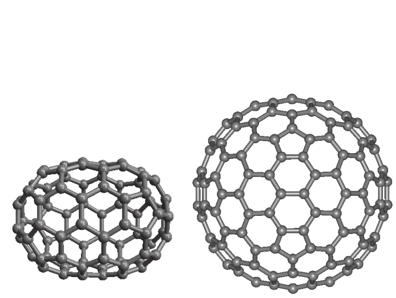
Z drugiej strony, niech S' będzie zbiorem końców krawędzi z M. Zauważmy, że S' jest pokryciem wierzchołkowym – przypuśćmy, że tak nie jest, czyli istnieje krawędź e, która nie ma końca w S'. Ale wtedy zbiór $M \cup \{e\}$ jest skojarzeniem w G, większym niż M – sprzeczność. Zatem $\gamma(G) \leq |S'| = 2|M| = 2\mu(G)$. $\square$

2. (5p.) Cząsteczka sferycznego fulerenu składa się z atomów węgla, rozmieszczonych na sferze. Jeśli wiązania między atomami wyobrazimy sobie jako odcinki na sferze, okazuje się, że nie przecinają się one wzajemnie. Własności chemiczne węgla narzucają dwa ograniczenia na strukturę cząsteczki: 1) każdy atom węgla wiąże się z dokładnie trzema innymi atomami i 2) każda ściana cząsteczki jest ograniczona przez cykl z pięciu lub sześciu atomów (patrz rysunki na dole strony). Ile ścian pięciokątnych ma cząsteczka o n atomach węgla?

Rozwiązanie. Niech f_5 oznacza liczbę ścian pięciokątnych, f_6 oznacza liczbę ścian sześciokątnych, a m liczbę krawędzi. Zauważmy, że graf G, w którym wierzchołki odpowiadają atomom węgla, a krawędzie wiązaniom, jest planarny (bo ma rysunek płaski na sferze, więc też na płaszczyźnie).

Z lematu o uściskach dłoni dla G^* wiemy, że $2m = \sum_{f \in F(G)} \deg f = 5f_5 + 6f_6$. Ponieważ każdy wierzchołek G ma stopień 3, z lematu o uściskach dłoni dla G otrzymujemy, że $2m = 3n$, zatem $5f_5 + 6f_6 = 3n$ $(\star)$.

Wreszcie z formuły Eulera wiemy, że $n - m + (f_5 + f_6) = 2$. Po wstawieniu $2m = 3n$ i przekształceniu, otrzymujemy $3n = 6f_5 + 6f_6 - 12$. Po porównaniu tego z $(\star)$ otrzymujemy, że $5f_5 + 6f_6 = 6f_5 + 6f_6 - 12$, czyli $f_5 = 12$. Każdy fuleren sferyczny ma 12 ścian pięciokątnych. Niesamowite. $\square$



3. (5p.) Niech $n > 0$. Rozważmy graf $G = (V, E)$, gdzie $V = [n]^n$, czyli wierzchołkami grafu G są wszystkie ciągi długości n o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, a $E = \{(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n) : (\forall i) x_i \neq y_i\}$, czyli krawędź między wierzchołkami występuje dokładnie wtedy, gdy różnią się one na każdej współrzędnej. Znaleźć $\chi(G)$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że zbiór $\{(i, \ldots, i) : i \in [n]\}$ jest kliką w G o liczności n, a więc $\chi(G) \geqslant n$.

Zdefiniujmy funkcję $f : V \to [n]$ następującym wzorem $f(x_1, \ldots, x_n) := x_1$, czyli wierzchołek kolorujemy jego pierwszą współrzędną. Rozważmy dwa sąsiadujące wierzchołki $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_n)$. Mamy $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ i $f(y_1, \ldots, y_n) = y_1$. Ponieważ wierzchołki te sąsiadują, to różnią się na wszystkich współrzędnych, w szczególności na pierwszej, czyli $x_1 \neq y_1$, co oznacza, że f jest poprawnym kolorowaniem grafu G, a więc $\chi(G) \leqslant n$. $\square$

4. (5p.) Przypomnijmy, że $R(a,b,c)$ to najmniejsza liczba n taka, że w każdym kolorowaniu krawędzi grafu K_n na niebiesko, czerwono i zielono, znajdziemy niebieski graf K_a, czerwony graf K_b, lub zielony graf K_c. Wykaż, że $R(3,3,4) \leq 2 \cdot R(3,4) + R(3,3,3) - 1$.

Rozwiązanie. Niech n będzie największą liczbą naturalną taką, że krawędzie grafu K_n można pokolorować kolorami niebieskim, czerwonym i zielonym, bez utworzenia niebieskiego trójkąta, czerwonego trójkąta, ani zielonego K_4. Rozważmy dowolne takie pokolorowanie grafu K_n. Ustalmy wierzchołek $v \in V(K_n)$. Niech V_1 oznacza zbiór wierzchołków połączonych z v krawędziami niebieskimi, V_2 – czerwonymi, a V_3 – zielonymi. Niech G_1, G_2, G_3 oznaczają podgrafy grafu K_n indukowane przez odpowiednio zbiory V_1, V_2, V_3.

Zauważmy, że gdyby w G_1 występowała niebieska krawędź uw, to wierzchołki u, v, w tworzyłyby niebieski trójkąt. Zatem G_1 jest pokolorowany dwoma kolorami – czerwonym i zielonym. Ponieważ K_n nie zawiera czerwonego trójkąta ani zielonego K_4, to G_1 też ich nie zawiera. Stąd $|V_1| < R(3,4)$.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla grafu G_2 (zamieniając rolami kolory niebieski i czerwony), otrzymujemy $|V_2| < R(3,4)$.

Zauważmy, że gdyby w grafie G_3 występował zielony trójkąt, to wraz z wierzchołkiem v utworzyłby w grafie K_n zieloną klikę K_4. Zatem w grafie G_3 unikamy trójkątów w każdym z trzech kolorów, czyli $|V_3| < R(3,3,3)$ Z powyższych nierówności otrzymujemy:

$$\begin{aligned} n =& 1 + |V_1| + |V_2| + |V_3| \leq 1 + R(3,4) - 1 + R(3,4) - 1 + R(3,3,3) - 1 \\ \leq& 2 \cdot R(3,4) + R(3,3,3) - 2. \end{aligned}$$

W każdym kolorowaniu K_{n+1} znajdziemy niebieski trójkąt, czerwony trójkąt, lub zielony K_4, co wynika z wyboru maksymalnego n. Zatem $R(3,3,4) \leq n + 1 \leq 2 \cdot R(3,4) + R(3,3,3) - 1$. $\square$