Zad. 1	**Zad. 2**	**Zad. 3**	**Zad. 4**	**SUMA**

1. (5p.) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem takim, że $|E| > 0$. Wykazać, że istnieje taki podział $V = W \cup U$ (podział, czyli zbiory W i U są rozłączne i niepuste), że

$$\chi(G[W]) + \chi(G[U]) = \chi(G).$$

Rozwiązanie. Dzięki założeniu $|E| > 0$ mamy, że $\chi(G) > 1$. Niech $c : V \to [\chi(G)]$ będzie poprawnym kolorowaniem grafu G. Zdefiniujmy $V_i := \{v \in V : c(v) = i\}$.

Pokażemy, że zbiory $W := V_1$ i $U := V \setminus W$ spełniają warunki zadania. Ponieważ V_1 jest niepustym zbiorem niezależnym w G, to $\chi(G[W]) = 1$. Zbadamy $\chi(G[U])$. Kolorowanie c ograniczone do zbioru U jest poprawnym kolorowaniem grafu $G[U]$, więc $\chi(G[U]) \leqslant \chi(G) - 1$. Przypuśćmy, że istnieje poprawne kolorowanie d grafu $G[U]$ na $\chi(G) - 2$ kolory. Wtedy funkcja $d' : V \to [\chi(G) - 1]$ dana wzorem

$$d'(v) := \begin{cases} d(v) & \text{dla } v \in U \\ \chi(G) - 1 & \text{dla } v \in V \setminus U \end{cases}$$

jest poprawnym $(\chi(G) - 1)$-kolorowaniem grafu G, co jest niedorzecznością, a zatem poczynione przypuszczenie, że $\chi(G[U]) < \chi(G) - 1$ było nieuzasadnione. Stąd $\chi(G[U]) = \chi(G) - 1$. $\square$

2. (5p.) Niech $s \geqslant t > 0$. Niech $G = (X \cup Y, E)$ będzie grafem dwudzielnym (X i Y są klasami dwudzielności tego grafu) takim, że dla każdego $v \in X$ zachodzi $\deg_G(v) = s$ i dla każdego $v \in Y$ zachodzi $\deg_G(v) = t$. Wykaż, że w G jest skojarzenie pokrywające zbiór X.

Rozwiązanie. Skorzystamy z twierdzenia Halla. Najpierw wprowadźmy oznaczenie, dla $Z \subseteq V(G)$ niech $E_Z := \{e \in E : e \cap Z \neq \emptyset\}$. Zauważmy, że zawsze $E_Z \subseteq E_{N(Z)}$. Niech teraz $S \subseteq X$. Dzięki dwudzielności grafu mamy $|E_S| = \sum_{v \in S} \deg_G(v) = s|S|$ oraz $|E_{N(S)}| = \sum_{v \in N(S)} \deg_G(v) = t|N(S)|$. Dzięki poczynionej wcześniej obserwacji i założeniom zadania mamy

$$s|S| \leqslant t|N(S)| \leqslant s|N(S)|,$$

co daje $|S| \leqslant |N(S)|$. $\square$

3. (5p.) Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią w której dla każdego łuku $a \in A(G)$ zachodzi $c(a) = 1$. Oznaczmy przez d odległość od źródła s do ujścia t, tzn. długość (liczbę krawędzi) najkrótszej skierowanej s-t-ścieżki w G. Pokazać, że dla każdego przepływu f zachodzi

$$\mathrm{val}(f) \leq \frac{|A(G)|}{d}.$$

Rozwiązanie. Wiemy z wykładu, że dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(K)$. Wystarczy w takim razie, że pokażemy, że istnieje przekrój K, taki że $\mathrm{cap}(K) \leq \frac{|A(G)|}{d}$.

Dla $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ niech D_i oznacza zbiór wierzchołków, które leżą w odległości i od s, oraz niech $S_i := \bigcup_{j=0}^{i} D_j$. Ponieważ dla każdego $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ mamy $s \in S_i$ oraz $t \notin S_i$, możemy zdefiniować rodzinę przekrojów $K_i := (S_i, V(G) \setminus S_i)$. Zauważmy, że jeśli łuk uv należy do przekroju K_i dla pewnego $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, oznacza to, że $u \in D_i$ oraz $v \in D_{i+1}$, a więc, z definicji zbiorów S_i, każdy łuk może należeć do co najwyżej jednego K_i.

Jeśli więc założymy, że każdy przekrój w G ma przepustowość większą niż $\frac{|A(G)|}{d}$, w szczególności każdy z przekrojów K_i ma przepustowość większą niż $\frac{|A(G)|}{d}$. Skoro każdy łuk ma przepustowość równą jeden, oznacza to, że dla każdego $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ zbiór K_i zawiera więcej niż $\frac{|A(G)|}{d}$ łuków. Skoro zaś istnieje d takich zbiorów i żaden łuk nie należy do więcej niż jednego z nich, dostajemy, że

$$\frac{|A(G)|}{d} \cdot d > |A(G)|,$$

co prowadzi do sprzeczności – a więc istnieje przekrój K taki, że $\mathrm{cap}(K) \leq \frac{|A(G)|}{d}$. $\square$

4. (5p.) Niech G będzie grafem o $n \geq 3$ wierzchołkach i m krawędziach, który można narysować na płaszczyźnie w taki sposób, że ma on dokładnie k przecięć krawędzi, przy czym żadne trzy krawędzie nie przecinają się w jednym punkcie (oczywiście poza ew. wspólnym końcem tych krawędzi). Pokaż, że $m \leq 3n + k - 6$.

Rozwiązanie. Rozważmy rysunek grafu G, o którym mowa w treści zadania. W każdym punkcie przecięcia krawędzi dodajmy nowy wierzchołek, otrzymujemy w ten sposób płaski rysunek pewnego grafu planarnego G'. Każda krawędź G odpowiada pewnej ścieżce w G', ścieżka ta zaczyna się i kończy wierzchołkiem z G, a jej wewnętrzne wierzchołki odpowiadają punktom przecięcia krawędzi. Niech n' i m' oznaczają odpowiednio liczę wierzchołków i liczbę krawędzi grafu G'.

Zauważmy, że $n' = n + k$ (wierzchołki G' to wierzchołki G i punkty przecięcia, a tych jest k). Ponadto $m' = m + 2k$ – dostawienie każdego wierzchołka w punkcie przecięcia zwiększa liczbę krawędzi o 2. Skoro G' jest planarny, zachodzi dla niego:

$$\begin{aligned} m' &\leq 3n' - 6 \\ m + 2k &\leq 3(n + k) - 6 \\ m &\leq 3n + k - 6 \end{aligned}$$

Inna, prostsza wersja rozwiązania, podpatrzona u studentów, którzy oddali kolokwium przed czasem. Ustalmy rysunek grafu G, o którym mowa w treści zadania. Zauważmy, że usuwając co najwyżej k krawędzi trzymamy graf płaski G': wystarczy usunąć jedną krawędź z każdego przecięcia (co najwyżej a nie dokładnie k, bo jedna krawędź może uczestniczyć w wielu przecięciach).

Przez m' oznaczmy liczbę krawędzi grafu G', oczywiście ma on n wierzchołków. Korzystając z formuły Eulera, otrzymujemy ciąg nierówności:

$$m \leq m' + k \leq 3n - 6 + k.$$

□