**1.** (5 p.) Niech $k \geqslant 1$ i niech $G$ będzie grafem. Załóżmy, że $V(G)$ można podzielić na rozłączne zbiory $X_1, X_2, X_3$ takie, że:

(1.) $\forall_{v \in X_3} N(v) \subseteq X_1$,

(2.) dla każdego $v \in X_3$ i dla każdego zbioru $S \subseteq X_1$ takiego, że $|S| = k$, jeśli $S \subseteq N(v)$, to istnieje $u \in X_2$ taki, że $S \subseteq N(u)$.

Pokaż, że jeśli $\chi(G[X_1 \cup X_2]) \leqslant k$, to $\chi(G) \leqslant k$.

Przypomnijmy, że przez $N(v)$ oznaczamy zbiór sąsiadów wierzchołka $v$.

*Rozwiązanie.* Załóżmy, że $\chi(G[X_1 \cup X_2]) \leqslant k$ i ustalmy poprawne $k$-kolorowanie $f$ grafu $G[X_1 \cup X_2]$. Pokażemy, że możemy rozszerzyć $f$ do poprawnego $k$-kolorowania grafu $G$. Niech $v \in X_3$. Z (1.) wszyscy sąsiedzi $v$ są w $X_1$, więc są już pokolorowani przez $f$. Jeśli $|f(N(v))| \leqslant k-1$, tzn. na sąsiadach wierzchołka $v$ występuje co najwyżej $k-1$ kolorów, to co najmniej jeden z $k$ kolorów może być użyty do pokolorowania $v$ i możemy rozszerzyć kolorowanie $f$ na wierzchołek $v$.

Załóżmy więc, że sąsiedzi $v$ są pokolorowani co najmniej $k$ kolorami i niech $s_1, \ldots, s_k \in N(v)$ będą takie, że $f(s_i) = i$ dla $i \in [k]$. Ponieważ $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ spełnia $|S| = k$ i $S \subseteq N(v)$, to z (2.) istnieje $u \in X_2$ taki, że $s_i \in N(u)$ dla każdego $i \in [k]$. To znaczy, że wierzchołek $u$ sąsiaduje z wierzchołkami pokolorowanymi przez $f$ na $k$ różnych kolorów. Ale wtedy $u$ nie może być pokolorowany przez $f$ na żaden z $k$ kolorów – sprzeczność, bo założyliśmy, że $u \in X_2$ był już pokolorowany przez $f$.

Zatem każdy wierzchołek $v \in X_3$ ma wszystkich sąsiadów pokolorowanych przez $f$ na co najwyżej $k-1$ kolorów i możemy $f$ rozszerzyć na każdy taki wierzchołek. $\square$

**2.** (5p.) Niech $G = (X \cup Y, E)$ będzie grafem dwudzielnym (o klasach dwudzielności $X$ i $Y$), a $M$ i $N$ dwoma skojarzeniami w $G$. Niech $A$ będzie podzbiorem zbioru $X$ złożonym z wierzchołków, które pokryte są przez skojarzenie $M$, a $B$ podzbiorem zbioru $Y$ złożonym z wierzchołków, które pokryte są przez skojarzenie $N$. Pokaż, że w $G$ istnieje skojarzenie, które pokrywa zbiór $A \cup B$.

*Rozwiązanie.* Rozważmy podgraf $H := G[M \cup N]$ grafu $G$ indukowany przez krawędzie skojarzeń $M$ i $N$. Krawędzie tego podgrafu pokrywają oczywiście zbiór $A \cup B$, ale nie muszą stanowić skojarzenia. Wybierzemy pewien podzbiór zbioru krawędzi grafu $H$, który spełni oba stawiane warunki. Jak wiadomo $\Delta(H) \leqslant 2$, czyli każda składowa grafu $H$ jest ścieżką lub cyklem. Dodatkowo każdy cykl ma parzystą długość (są co najmniej dwa powody ku temu – po pierwsze $H$ skonstruowaliśmy z dwóch skojarzeń, po drugie $H$ jest grafem dwudzielnym, jako podgraf grafu dwudzielnego).

Z każdego cyklu wybieramy co drugą krawędź. Ten zbiór krawędzi pokrywa ten sam zbiór wierzchołków, co cały cykl, a jest już skojarzeniem. Podobnie ze ścieżki nieparzystej długości (czyli o nieparzystej liczbie krawędzi) wybieramy co drugą krawędź poczynając od skrajnej – ten zbiór krawędzi pokrywa ten sam zbiór wierzchołków, co cała ścieżka, a jest skojarzeniem. Do rozważenia pozostały ścieżki parzystej długości. Niech $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{2k-1}, e_{2k}, v_{2k})$ będzie składową grafu $H$. Wierzchołki $v_0$ i $v_{2k}$ należą do tej samej klasy dwudzielności grafu $G$, bez straty ogólności przyjmijmy, że $v_0, v_{2k} \in X$. Z kolei krawędzie $e_1$ i $e_{2k}$ pochodzą różnych skojarzeń wyjściowych. Znowu bez straty ogólności przyjmijmy, że $e_1 \in M$, a $e_{2k} \in N$. Oznacza to, że $v_{2k} \notin A \cup B$: z jednej strony $v_{2k} \notin A$, bo nie jest końcem żadnej krawędzi ze skojarzenia $M$, a z drugiej $v_{2k} \notin B$, bo $v_{2k} \in X$. Wtedy zbiór krawędzi $\{e_{2i-1} : i \in [k]\}$ (co druga, poczynając od $e_1$) pokrywa te same wierzchołki ze zbioru $A \cup B$, co ścieżka $P$ i jest skojarzeniem.

Szukanym skojarzeniem jest suma skojarzeń znalezionych dla poszczególnych składowych grafu $H$. $\square$

**3.** (5p.) Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, w której największy przepływ ma wartość $z > 0$. Dla dowolnego łuku $a \in A(G)$, przez $c_{[a+]}$ oznaczmy funkcję, uzyskaną z $c$ przez zwiększenie przepustowości łuku $a$ o 1 (pozostałe przepustowości pozostają bez zmian). Podobnie, przez $c_{[a-]}$ oznaczmy funkcję, uzyskaną z $c$ przez zmniejszenie przepustowości łuku $a$ o 1 (pozostałe przepustowości pozostają bez zmian).

Niech $A^+$ będzie zbiorem tych łuków $a$, dla których największy przepływ w sieci $(G, c_{[a+]}, s, t)$ ma wartość większą niż $z$. Niech $A^-$ będzie zbiorem tych łuków $a$, dla których największy przepływ w sieci $(G, c_{[a-]}, s, t)$ ma wartość mniejszą niż $z$.

Udowodnij lub obal poniższe stwierdzenia.

1. Dla każdej sieci $N$, spełniającej założenia, zbiór $A^+$ jest niepusty.
2. Dla każdej sieci $N$, spełniającej założenia, zbiór $A^-$ jest niepusty.

*Rozwiązanie.* Najpierw pokażmy, że zdanie 1. jest nieprawdziwe. Rozważmy sieć jak na rysunku poniżej (liczby oznaczają przepustowości krawędzi). Największy przepływ w tej sieci ma wartość 1. Po zwiększeniu przepustowości dowolnego łuku o 1, największy przepływ nadal będzie miał wartość 1.

$$s \xrightarrow{1} v \xrightarrow{1} t$$

Teraz pokażemy, że zdanie 2. jest prawdziwe. Niech $f$ będzie największym przepływem w $N$, a $K = (S, \overline{S})$ będzie najmniejszym przekrojem. Z tw. Forda-Fulkersona wiemy, że $\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$, a ponieważ $\operatorname{val} f = z > 0$, wnioskujemy, że w $K$ musi istnieć krawędź o dodatniej przepustowości. Weźmy taką krawędź $a$. Pokażemy, że $a \in A^-$.

Rozważmy sieć $N' = (G, c_{[a-]}, s, t)$. Zwróćmy uwagę, że zbiór krawędzi $K = (S, \overline{S})$ jest przekrojem w sieci $N'$ i jego przepustowość wynosi $\sum_{e \in K} c_{[a-]}(e) = \sum_{e \in K} c(e) - 1 = \operatorname{cap} K - 1 = z - 1$. Zatem, stosując twierdzenie Forda-Fulkersona dla sieci $N'$, otrzymujemy, że największy przepływ w tej sieci ma wartość co najwyżej $z - 1$. Oznacza to, że $a \in A^-$. $\square$

**4.** (5p.) Niech $G_1$ i $G_2$ będą spójnymi grafami, każdy o co najmniej trzech wierzchołkach. Pokaż, że $G_1 \,\square\, G_2$ jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych $t, m, k \geqslant 3$, spełniony jest jeden z poniższych warunków:

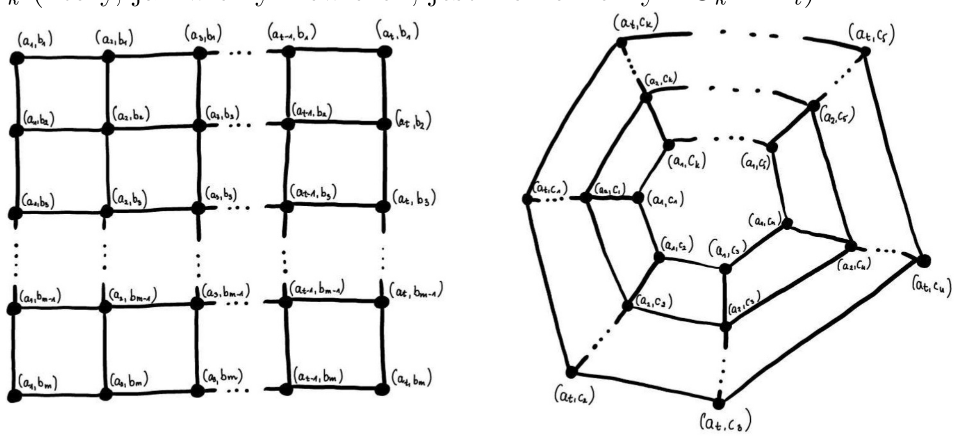
(i) $G_1 = P_t$ oraz $G_2 = P_m$ (czyli $G_1$ i $G_2$ są ścieżkami),

(ii) $\{G_1, G_2\} = \{P_t, C_k\}$ (czyli jeden z nich jest ścieżką, a drugi cyklem).

Przypomnijmy, że dla grafów $G_1$ i $G_2$ ich iloczyn $G_1 \,\square\, G_2$ definiujemy następująco:

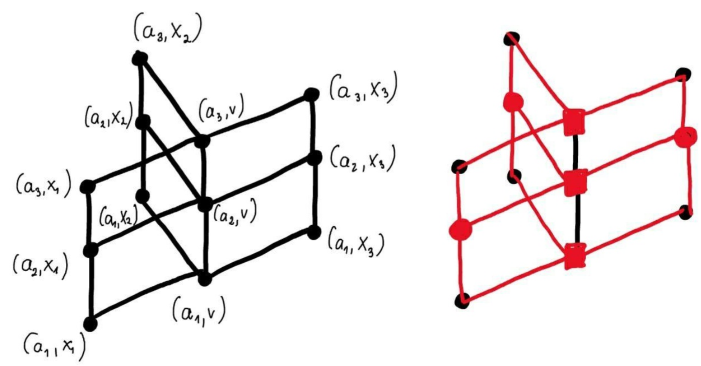
$$\begin{aligned} V(G_1 \,\square\, G_2) =& V(G_1) \times V(G_2), \\ E(G_1 \,\square\, G_2) =& \Big\{(v_1, v_2)(u_1, u_2) \mid \big(v_1 = u_1 \text{ i } v_2u_2 \in E(G_2)\big) \text{ lub } \big(v_1u_1 \in E(G_1) \text{ i } v_2 = u_2\big)\Big\}. \end{aligned}$$

*Rozwiązanie.* Najpierw pokażemy, że grafy $P_t \,\square\, P_m$, $P_t \,\square\, C_k$ oraz $C_k \,\square\, P_t$ można narysować w sposób planarny. Istotnie, oznaczmy przez $a_1, \ldots, a_t$ i $b_1, \ldots, b_m$, odpowiednio, kolejne wierzchołki ścieżek $P_t$ i $P_m$ oraz przez $c_1, \ldots, c_k$ kolejne wierzchołki cyklu $C_k$. Na rysunku poniżej po lewej stronie przedstawiono $P_t \,\square\, P_m$, a po prawej $P_t \,\square\, C_k$ (który, jak wiemy z ćwiczeń, jest izomorficzny z $C_k \,\square\, P_t$).



Żeby pokazać implikację w drugą stronę, załóżmy, że $G_1$ i $G_2$ są takie, że żaden z warunków (i), (ii) nie zachodzi. Oznacza to, że grafy $G_1$ i $G_2$ nie są (jednocześnie) ścieżkami oraz że jeśli jeden z nich jest ścieżką, to drugi nie może być cyklem. Chcemy pokazać, że $G_1 \,\square\, G_2$ nie jest planarny.

**Przypadek 1:** Jeden z grafów $G_1$ lub $G_2$ nie jest ścieżką ani cyklem, bez utraty ogólności załóżmy, że tym grafem jest $G_1$. Skoro tak, a przy tym jest spójny, to $G_1$ musi zawierać wierzchołek stopnia co najmniej 3. Oznaczmy taki wierzchołek przez $v$, a jego trzech różnych sąsiadów przez $x_1, x_2$ i $x_3$. Graf $G_2$ jest spójnym grafem o co najmniej 3 wierzchołkach, zawiera więc wierzchołki $a_1, a_2$ i $a_3$, które tworzą (niekoniecznie indukowaną) ścieżkę o trzech wierzchołkach. Zauważmy, że $G_1 \,\square\, G_2$ zawiera podgraf przedstawiony na rysunku obok (lewy rysunek), w którym znajdziemy podpodział $K_{3,3}$ (prawy rysunek). Zatem graf ten nie jest planarny.




**Przypadek 2:** $G_1$ jest ścieżką lub cyklem oraz $G_2$ jest ścieżką lub cyklem. Ponieważ żaden z warunków (i), (ii) nie zachodzi, pozostaje nam do rozważenia możliwość, że zarówno $G_1$ jak i $G_2$ są cyklami. Jednak wiemy z ćwiczeń (zadanie 8.1. d)), że iloczyn dwóch cykli nie jest grafem planarnym, co kończy dowód. ☐