

MDI2 Zestaw 1: SPÓJNOŚĆ

- 1.1 (🍷) Pokaż, że każdy graf spójny o co najmniej trzech wierzchołkach zawiera co najmniej dwa wierzchołki, których usunięcie nie powoduje rozspójnienia grafu.
- 1.2 Pokaż, że w każdym grafie spójnym każde dwie ścieżki maksymalnej długości mają wspólny wierzchołek.
- 1.3 (🍷) Pokaż, że $\mathcal{C}(G) + m \geq n$ dla dowolnego grafu $G = (V, E)$, gdzie $\mathcal{C}(G)$ oznacza liczbę składowych grafu G oraz $n = |V(G)|$ i $m = |E(G)|$.
- 1.4 (🍷) Pokaż, że jeśli każdy wierzchołek w grafie spójnym G ma stopień parzysty, to G nie ma krawędzi rozcinających.
- 1.5 Pokaż, że jeśli graf G jest k -regularny ($k \geq 2$) i dwudzielny, to G nie ma mostów.
- 1.6 (⚙️) Niech $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ będzie ciągiem stopni wierzchołków w grafie G . Pokaż, że jeśli $d_k \geq k$ dla każdego $k \leq n - d_n - 1$, to G jest spójny.
- 1.7 Pokaż, że jeśli G jest dwuspójny, to dla każdych dwóch jego wierzchołków istnieje cykl zawierający te wierzchołki.
- 1.8 (🕒) Graf nazwiemy *bispójnym*, jeśli jest 2-spójny lub jest izomorficzny z K_2 . *Blokiem* w grafie $G = (V, E)$ nazywamy każdy maksymalny podgraf bispójny. Niech B będzie zbiorem bloków grafu G , a C zbiorem jego wierzchołków rozcinających. Zdefiniujmy graf dwudzielny $G_B := (B \cup C, F)$, gdzie
- $$F := \{bv : b \in B \wedge v \in C \wedge v \in V(b)\}.$$
- Graf G_B nazywany jest *grafem blokowym* grafu G . Wykaż, że graf blokowy dowolnego grafu spójnego G jest drzewem.
- 1.9 Pokaż, że jeśli graf G jest 3-regularny, to $\kappa(G) = \kappa'(G)$.
- 1.10 Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych $a \leq b \leq c$ istnieje graf G taki, że $\kappa(G) = a$, $\kappa'(G) = b$, $\delta(G) = c$.
- 1.11 Pokaż, że w grafie spójnym jeśli $\delta(G) \geq n - 2$, to $\kappa(G) = \delta(G)$. Znaleźć taki graf G , dla którego $\delta(G) = n - 3$ oraz $\kappa(G) < \delta(G)$.
- 1.12 Pokaż, że jeśli G nie jest grafem pełnym i $\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$, to $\kappa(G) \geq k$.
- 1.13 Pokaż, że jeśli $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, to $\kappa'(G) = \delta(G)$. Znaleźć taki spójny graf G , dla którego $\delta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ oraz $\kappa'(G) < \delta(G)$.
- 1.14 Niech $U \subset V(G)$ oraz $x \in V(G) - U$. Wtedy $x - U$ -wachlarzem nazywamy $|U|$ niezależnych $x - U$ dróg (tj. dróg łączących wierzchołek x z wierzchołkami zbioru U , których jedynym punktem wspólnym jest wierzchołek x). Pokaż, że G jest k -spójny wtedy i tylko wtedy gdy $|G| \geq k + 1$ oraz dla każdego $U \subseteq V(G)$ liczności k i dla każdego $x \in V(G) - U$ istnieje $x - U$ wachlarz.

- 1.15 (⚙️) Pokaż, że jeśli G jest k -spójny ($k \geq 2$), to dla każdych k jego wierzchołków istnieje cykl zawierający te wierzchołki.
- 1.16 (⚙️) Zbiorem *dominującym* w grafie G nazywamy taki zbiór X wierzchołków, że każdy wierzchołek z $V(G) \setminus X$ ma sąsiada w X .
Pokaż, że jeśli $E' \subseteq E(G)$ jest krawędziowym zbiorem rozcinającym i G ma zbiór dominujący, który nie przecina jakiejś składowej $G - E'$, to $|E'| \geq \delta(G)$.
-

Zadanie bez numerka: Pokaż, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli nieparzystej długości.