# **MDI 2** Zestaw 2: OBWÓD EULERA

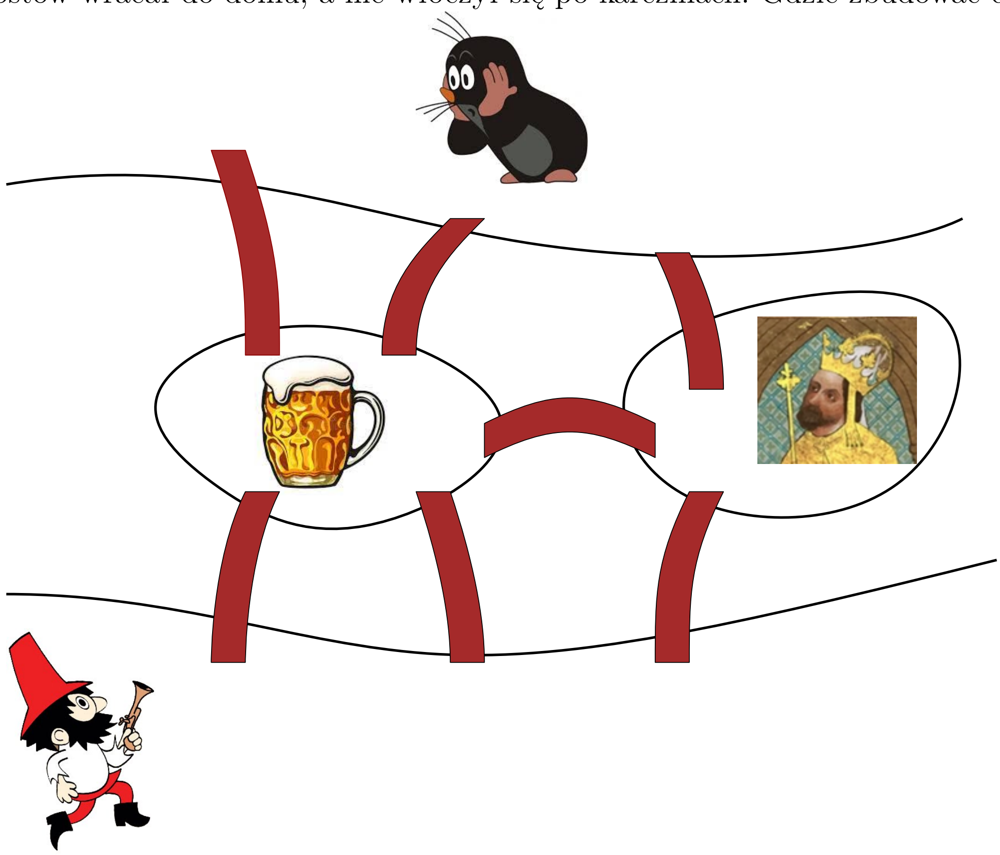
2.1 (🍃) Niech $G$ będzie regularnym grafem o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi. Pokaż, że $G$ nie jest eulerowski. Czy w powyższym zdaniu można opuścić założenie o regularności?

2.2 (🍃) Mieszkańcy Královca (patrz mapka poniżej), siedząc wieczorem w karczmie, często robili zakłady, że uda im się przejść po każdym moście dokładnie raz i wrócić do karczmy. Niestety, nikomu się to nie udawało, aż w końcu Mistrz Euler pokazał, że jest to niemożliwe.

a) Rumcajs, chcąc zaimponować mieszkańcom Královca, postanowił zbudować nowy most, który pozwoliłby mu wystartować w swojej siedzibie i przejść przez każdy most dokładnie raz, kończąc wycieczkę w karczmie. Gdzie zbudować ósmy most?

b) Krecik rozłościł się występkiem Rumcajsa i postanowił zbudować jeszcze jeden most, który pozwoliłby jemu dojść do karczmy (zaczynając od norki i przechodząc przez każdy most raz), jednocześnie uniemożliwiając to Rumcajsowi. Gdzie zbudować dziewiąty most?

c) Mądry król Karol postanowił zakończyć te spory i jednocześnie ukrócić pijaństwo w Královcu. Chce zbudować jeszcze jeden most, aby każdy mieszkaniec, po wyjściu z domu i obejściu wszystkich mostów wracał do domu, a nie włóczył się po karczmach. Gdzie zbudować dziesiąty most?



2.3 Weźmy dowolne $k \geq 1$. Pokaż, że jeśli $G$ jest spójny i ma $2k$ wierzchołków stopnia nieparzystego to istnieją krawędziowo rozłączne drogi (dopuszczalne powtarzanie wierzchołków, ale nie krawędzi) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, takie że $E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \ldots \cup E(Q_k) = E(G)$.

2.4 (🍃) Niech $G$ będzie grafem $k$-regularnym, $|G| = 2k+1$. Pokaż, że $G$ i jego dopełnienie są eulerowskie.

2.5 Pokaż, że krawędzie dowolnego grafu 4-regularnego można pomalować na czerwono i niebiesko w taki sposób, że każdy wierzchołek jest incydentny z dwoma krawędziami czerwonymi i dwoma niebieskimi.

2.6 Pokaż, że graf spójny $G$ jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy gdy każdy blok jest podgrafem eulerowskim. *Blok* jest to maksymalny podgraf bispójny.

2.7 *Spacerem* w grafie nazywamy naprzemienny ciąg wierzchołków i krawędzi $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_m, v_m$, gdzie dla każdego $i$ mamy $e_i = v_{i-1}, v_i$. Spacer jest *zamknięty*, jeśli $v_0 = v_m$. Intuicyjnie, spacer różni się od ścieżki i drogi tym, że możemy powtarzać krawędzie.
Dla $k \geq 1$ scharakteryzuj wszystkie grafy, dla których istnieje spacer zamknięty, który odwiedza każdą krawędź dokładnie $k$ razy.

2.8 W pudełku znajduje się komplet domina: każda kostka ma dwa pola, a na każdym polu znajduje się od zera do sześciu kropek. Dla każdej pary liczb kropek istnieje dokładnie jedna kostka, która ją realizuje.

Kostki możemy dokładać do siebie w taki sposób, że na sąsiadujących polach znajduje się ta sama liczba kropek. Pokaż, że wszystkie kostki można ułożyć w taki sposób, że tworzą one obwód pewnego wielokąta (czyli nie ma rozgałęzień i ostatnia kostka pasuje do pierwszej).

2.9 (⚙) Udowodnij poprawność algorytmu dla problemu chińskiego listonosza (chodzi o algorytm z wykładu), zakładając, że umiemy znaleźć najkrótsze ścieżki między wierzchołkami i optymalnie połączyć wierzchołki nieparzystego stopnia w pary.