# **MDI 2** Zestaw 3: Cykl Hamiltona

3.1 () Podać przykład grafu spójnego, który

a) nie ma obwodu Eulera i nie ma cyklu Hamiltona

b) ma obwód Eulera i nie ma cyklu Hamiltona

c) nie ma obwodu Eulera i ma cykl Hamiltona

d) ma obwód Eulera i ma cykl Hamiltona.

3.2 () Pokaż, że jeśli graf $G$ jest 6-regularny i ma 11 wierzchołków to $G$ ma cykl Hamiltona.

3.3 () Pokaż, że jeśli graf $G$ jest ma cykl Hamiltona, to jest 2-spójny.

3.4 a) Pokaż, że jeśli graf $G$ jest dwudzielny o klasach $X$ i $Y$ oraz $|X| \neq |Y|$, to $G$ nie jest hamiltonowski.
b) Jaka jest największa liczba krawędzi w niehamiltonowskim grafie dwudzielnym o $2k$ wierzchołkach?

3.5 Dla grafu $G = (V, E)$ definiujemy graf krawędziowy $L(G) = (E, F)$ gdzie $e, f \in E$ tworzą krawędź w $L(G)$ jeśli w $G$ mają wspólny koniec. Jak zależą od siebie eulerowskość i hamiltonowskość grafów $G$ i $L(G)$?

3.6 Udowodnij Twierdzenie Orego: Jeśli w grafie $G$ o $n \geq 3$ wierzchołkach dla każdej pary niesąsiadujących wierzchołków $u$ i $v$ zachodzi $\deg v + \deg u \geq n$, to $G$ zawiera cykl Hamiltona. Wykaż, że Twierdzenie Orego jest silniejsze od Twierdzenia Diraca.

3.7 Czy szachownice $4 \times 4$ oraz $5 \times 5$ można obejść skoczkiem szachowym (wracając na pole wyjściowe oraz każde inne pole odwiedzając dokładnie raz) ?

3.8 () Dla grafu $G$, graf $G^2$ powstaje z $G$ przez dodanie krawędzi łączących wszystkie wierzchołki oddalone od siebie o 2.

Znajdź wszystkie drzewa $T$, dla których graf $T^2$ jest Hamiltonowski.

3.9 Rozważmy algorytmy aproksymacyjne dla problemu komiwojażera. Pokaż, że dla żadnego $c$ i żadnego wariantu rozstrzygania remisów

a) algorytm zachłanny (startujemy z dowolnego wierzchołka i zawsze wybieramy najbliższego nieodwiedzonego sąsiada) nie jest $c$-aproksymacyjny,

b) algorytm TA-MST (dwa razy wokół minimalnego drzewa rozpinającego) nie jest $c$-aproksymacyjny.

3.10 () Powiemy, że graf $G$ jest prawie hamiltonowski, jeśli istnieje w $G$ wierzchołek $u \in V(G)$, taki że graf $G - u$ jest hamiltonowski. Oznaczmy przez $g(G)$ długość najkrótszego cyklu w $G$. Pokaż, że jeśli $G$ jest prawie hamiltonowski, to

$$g(G) \leq \frac{|V(G)| + 2\deg u - 1}{\deg u}.$$