MDI 2 Zestaw 4: Kolorowania krawędziowe

4.1 Niech $\mu(G)$ oznacza liczność największego skojarzenia w G. Pokaż, że $|E(G)| \leq \chi'(G) \cdot \mu(G)$.

4.2 Ile wynosi $\chi'(K_n)$? Znajdź poprawne kolorowanie K_n na najmniejszą możliwą liczbę kolorów.

Wskazówka: Rozważ osobno n nieparzyste i n parzyste.

4.3 Udowodnij, że jeśli G jest 3-regularnym grafem hamiltonowskim, to $\chi'(G) = 3$.

4.4 Niech G będzie grafem k-regularnym. Pokaż, że $\chi'(G) = k+1$, gdy spełniony jest jeden z warunków:

a) G ma nieparzystą liczbę wierzchołków,

b) G jest spójny i ma wierzchołek rozcinający.

4.5 Niech M i N będą rozłącznymi skojarzeniami w G, takimi że $|M| > |N|$. Pokaż, że istnieją rozłączne skojarzenia M' i N', takie że $|M'| = |M| - 1$, $|N'| = |N| + 1$ oraz $M \cup N = M' \cup N'$.

4.6 Niech G będzie grafem, ustalmy dowolne $p \geq \chi'(G)$. Pokaż, że istnieje poprawne p-kolorowanie krawędziowe f grafu G takie, że dla dowolnych dwóch kolorów c_1, c_2 zachodzi

$$|\{e \in E\colon f(e) = c_1\}| - |\{e \in E\colon f(e) = c_2\}| \in \{-1, 0, +1\},$$

(czyli liczby krawędzi w poszczególnych kolorach są możliwie równe).

4.7 Iloczynem kartezjańskim grafów G i H (ozn. $G \,\Box\, H$) nazywamy graf taki, że $V(G \,\Box\, H) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G \,\Box\, H) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : u_1 = v_1 \text{ i } u_2v_2 \in E(H) \text{ lub } u_1v_1 \in E(G) \text{ i } u_2 = v_2\}$.

Pokaż, że

a) $\chi'(G \,\Box\, K_2) = \Delta(G \,\Box\, K_2)$,

b) jeśli $E(H) \neq \emptyset$ i $\chi'(H) = \Delta(H)$, to $\chi'(G \,\Box\, H) = \Delta(G \,\Box\, H)$.

4.8 Udowodnij twierdzenie Fourniera: Niech G będzie grafem, w którym wierzchołki stopnia $\Delta(G)$ indukują las. Wtedy $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Wskazówka: Przypomnij sobie, że na wykładzie udowodniliśmy coś silniejszego niż twierdzenie Vizinga.