

## MDI 2 Zestaw 5: KOLOROWANIE WIERZCHOŁKOWE

- 5.1 (🍷) Niech  $\alpha(G)$  oznacza liczbę największego zbioru niezależnego w  $G$ . Pokaż, że  $n \leq \alpha(G)\chi(G)$ .
- 5.2 Jaka jest liczba chromatyczna grafu otrzymanego z grafu pełnego  $K_n$  przez wyrzucenie
- jednej krawędzi,
  - dwóch krawędzi,
  - trzech krawędzi tworzących trójkąt?
- 5.3 Niech  $G_n := (\mathbb{Z}_n, E_n)$ , gdzie  $E_n := \{uv : u = v + 1 \vee u = v + 2\}$ . Wyznacz  $\chi(G_n)$ .
- 5.4 Dla pewnego grafu  $G = (V, E)$  i pewnego zbioru  $V' \subset V$  konstruujemy graf

$$G' = (V, E \cup \{(u, w) : u \in V', w \in V - V'\}).$$

Wykaż, że wówczas  $\chi(G') \leq 2 \cdot \chi(G)$ .

- 5.5 *Kostką  $d$ -wymiarową* nazywamy graf  $Q_d$ , którego wierzchołkami są wszystkie  $d$ -elementowe ciągi binarne,  $(a_1, a_2, \dots, a_d)$  sąsiaduje z  $(b_1, b_2, \dots, b_d)$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedno  $i$ , że  $a_i \neq b_i$ . Jaka jest liczba chromatyczna  $Q_d$ ?
- 5.6 Pokaż, że a)  $\chi(G \square H) \leq \chi(G) \cdot \chi(H)$  b) (🌀)  $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ .
- 5.7 Niech  $(d_1, \dots, d_n)$  będzie ciągiem stopni wierzchołków  $G$ . Pokaż, że  $\chi(G) \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \min\{d_i + 1, i\}$ .
- 5.8 (🍷) Pokaż, że jeśli  $G$  jest spójny i  $\delta(G) < \Delta(G)$ , to  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ . Czy można pominąć założenie o spójności?
- 5.9 Udowodnij twierdzenie Szekeresa-Wilfa:  $\chi(G) \leq \max_{H \subseteq G \text{ indukowany}} \{\delta(H) + 1\}$ .
- 5.10 Pokazać, że jeśli graf  $G$  jest pokolorowany właściwie na  $\chi(G)$  kolorów, to w każdym kolorze istnieje wierzchołek stopnia co najmniej  $\chi(G) - 1$ .
- 5.11 Pokaż, że

$$\text{a) } \chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n,$$

$$\text{b) } \chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{n},$$

$$\text{c) } \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1,$$

$$\text{d) } \chi(G)\chi(\overline{G}) \leq (n + 1)^2/4.$$

- 5.12 Pokaż, że każdy graf krytyczny jest bispójny.
- 5.13 Pokaż, że w grafie krytycznym nie ma zbioru rozcinającego, który jest kliką.
- 5.14 Scharakteryzuj wszystkie grafy 3-krytyczne.
- 5.15 Pokaż, że dla każdego grafu istnieje ustawienie jego wierzchołków w ciąg, dla którego algorytm zachłanny pokoloruje graf optymalnie.
- 5.16 Algorytm **Largest First**: Najpierw uporządkuj wierzchołki według stopni, od największego. Następnie pokoloruj graf zachłannie, rozpatrując wierzchołki w tej kolejności. Pokaż, że dla żadnego  $c$  algorytm **Largest First** nie jest  $c$ -aproxymacyjny, nawet jeśli graf wejściowy jest drzewem.
- 5.17 Algorytm **Smallest Last**: Skonstruuj permutację wierzchołków w następujący sposób: znajdź wierzchołek najniższego stopnia w grafie  $G$ , usuń go i wstaw na koniec ciągu. Powtarzamy ten krok, dopóki w grafie są jeszcze wierzchołki. Następnie odwróć otrzymaną permutację i pokoloruj graf zachłannie, rozpatrując wierzchołki zgodnie z podaną kolejnością.
- pokaż, że algorytm **Smallest Last** optymalnie koloruje drzewa,
  - pokaż, że algorytm **Smallest Last** nie jest algorytmem optymalnym.