

## MDI 2 Zestaw 6: SKOJARZENIA

- 6.1 Magik prezentuje następującą sztuczkę. Widz dowolnie wybiera ze standardowej talii kart (52 karty) pięć z nich i pokazuje je asystentce magika. Asystentka wybiera spośród tych pięciu kart cztery i pokazuje je pojedynczo magikowi. Następnie magik bezbłędnie odgaduje, jaka jest piąta karta wybrana przez widza. Czy to czary?
- 6.2 Pokaż, że jeśli  $G$  jest grafem dwudzielnym o klasach  $X$  i  $Y$ , to maksymalna liczba krawędzi skojarzenia wynosi  $\min_{A \subseteq X} (|X - A| + |N(A)|)$ , gdzie  $N(A)$  oznacza zbiór sąsiadów w  $G$  wierzchołków należących do  $A$  (twierdzenie Königa-Egerváry'ego).
- 6.3 Klaster obliczeniowy ma pewną liczbę  $k$ -rdzeniowych procesorów. Chcemy wykonać program równoległy, składający się z niezależnych od siebie procesów. Nie każdy proces może być wykonywany przez każdy procesor, ale wszystkie rdzenie należące do jednego procesora mogą wykonywać te same procesy. Sformułuj warunek konieczny i wystarczający na to, by każdy proces dało się przypisać do innego rdzenia (nie każdy procesor musi być wykorzystany).
- 6.4 Udowodnij twierdzenie Königa: Jeśli  $G$  jest dwudzielny, to  $\chi'(G) = \Delta(G)$ . Podpowiedź:
- Pokaż, że graf dwudzielny regularny ma skojarzenie doskonałe.
  - Pokaż, że graf dwudzielny  $G$  jest podgrafem pewnego  $\Delta(G)$ -regularnego grafu dwudzielnego.
- 6.5 Udowodnij, że każdy prostokąt łaciński można rozszerzyć do kwadratu łacińskiego (macierz wymiaru  $n \times m$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, \dots, m\}$  jest prostokątem łacińskim, jeśli w żadnej kolumnie ani wierszu nie powtarza się żaden wyraz).
- 6.6 Wykaż, że prostokąt łaciński  $n \times m$  można rozszerzyć na co najmniej  $(m - n)!$  sposobów. Znajdź dolne ograniczenie na liczbę kwadratów łacińskich  $m \times m$ .
- 6.7 (♣) Przypuśćmy, że warunek Halla jest spełniony i że każda z  $m$  dziewcząt akceptuje przynajmniej  $t$  kawalerów. Udowodnij, że małżeństwa mogą być skojarzone na  $t!$  sposobów gdy  $t \leq m$  i na  $t!/(t - m)!$  sposobów gdy  $t > m$  (tw. Halla, zbieżność nazwisk przypadkowa).
- 6.8 Popraw dolne ograniczenie na liczbę kwadratów łacińskich, korzystając z zadania 6.7.
- 6.9 Pokaż, że w dowolnej grupie  $m$  panien i  $n$  kawalerów istnieje  $k$  panien, którym można znaleźć mężów wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny podzbiór  $S$  panien akceptuje łącznie przynajmniej  $|S| + k - m$  kawalerów.
- 6.10 (♣) Czy istnieją systemy różnych reprezentantów dla rodzin zbiorów
- $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{2, 3\}$ ,
  - $\{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 5, 6\}$ ,
  - $\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}$ ?
- 6.11 Dla danego  $J_0 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $J_0 \neq \emptyset$  podaj przykład ciągu  $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ ,  $A_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , który nie ma systemu różnych reprezentantów, lecz spełniony jest warunek
- $$\forall J \neq J_0 \left| \bigcup_{j \in J} A_j \right| \geq |J|.$$
- 6.12 Pokaż, że warunek Halla dla ciągu  $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$  podzbiorów zbioru  $X$  jest równoważny warunkowi: dla każdego  $Y \subseteq X$  zachodzi  $|\{i : A_i \subseteq Y\}| \leq |Y|$ .
- 6.13 Zmodyfikuj algorytm Edmonsa (algorytm z wykładu), aby znajdował najliczniejsze skojarzenie w grafie dwudzielnym  $G$ .
- 6.14 (♣) Zaprojektuj wielomianowy algorytm 2-aproksymacyjny dla problemu znajdowania najmniejszego maksymalnego skojarzenia w grafie.