MDI 2 Zestaw 7: Przepływy w sieciach

7.1 Udowodnij Lemat 2: Dla dowolnego przepływu f w N i dowolnego przekroju $(S, V \setminus S)$ zachodzi $\operatorname{val} f = f^+(S) - f^-(S)$.

7.2 (✐) Udowodnij Obserwację 5: Niech f będzie przepływem, a P ścieżką f-powiększającą. Zdefiniujmy:

$$\widehat{f} = \begin{cases} f(a) + r(P) & \text{jeśli } a \text{ jest łukiem na } P \text{ skierowanym w przód,} \\ f(a) - r(P) & \text{jeśli } a \text{ jest łukiem na } P \text{ skierowanym w tył,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ nie należy do } P. \end{cases}$$

Pokaż, że $\widehat{f}$ jest przepływem i $\operatorname{val} \widehat{f} = \operatorname{val} f + r(P)$.

7.3 Zaproponuj algorytm znajdowania maksymalnego przepływu w sieci z wieloma źródłami i wieloma ujściami. Przepływ w takiej sieci definiujemy analogicznie do sieci z jednym źródłem i jednym ujściem. Jeśli S jest zbiorem źródeł i T jest zbiorem ujść, to dla każdego $v \notin S \cup T$ funkcja przepływu spełnia prawo Kirchhoffa, a wartość przepływu f wynosi $f^+(S) - f^-(S) = f^-(T) - f^+(T)$ (dlaczego zachodzi równość?).

7.4 Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią. Niech $p \colon V(G) \setminus \{s, t\} \to [0, +\infty)$ będzie *przepustowością wierzchołkową*. Zaproponuj algorytm znajdowania maksymalnego przepływu f w sieci N z dodatkowym założeniem, że dla każdego wierzchołka $v \notin \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) \leq p(v)$.

7.5 Niech $G = (V, A)$ będzie grafem skierowanym.

a) Dla każdego wierzchołka $v \in V$ dana jest liczba całkowita $d(v)$ (zwróćmy uwagę, że $d(v)$ może być dodatnie, ujemne, lub równe 0). *Cyrkulacją* nazywamy dowolną funkcję $f : A \to [0, \infty)$, która dla każdego wierzchołka v spełnia warunek $d(v) = f^+(v) - f^-(v)$. Pokaż, że problem istnienia cyrkulacji można sprowadzić do problemu znajdowania największego przepływu w grafie.

b) Dane są dwie funkcje $\ell, c : A \to \mathbb{N}_+$ takie, że dla każdego $a \in A$ mamy $\ell(a) \leq c(a)$. Tym razem szukamy funkcji $f : A \to \mathbb{N}_+$, która dla każdego wierzchołka spełnia warunek Kirchhoffa, a dla każdego łuku a zachodzi $\ell(u) \leq f(u) \leq c(a)$. Znajdź algorytm, który stwierdza, czy taki wariant cyrkulacji istnieje.

Podpowiedź: Sprowadź problem do szukania największego przepływu w odpowiedniej sieci.

c) Zaadaptuj sieci z punktów a) i b), aby szukać cyrkulacji, która jednocześnie spełnia wymagania wierzchołków (czyli funkcję d), jak i ograniczenia na łuki (funkcje ℓ i c).

7.6 Warianty twierdzenia Mengera.

a) Niech G bedzie grafem skierowanym, a x, y jego różnymi wierzchołkami. Przez x-y-cięcie mamy na myśli zbiór krawędzi, których usunięcie sprawi, że grafie nie będzie żadnej skierowanej ścieżki o początku w x i końcu w y. Pokaż, że w grafie skierowanym rozmiar najmniejszego x-y-cięcia równa się największej liczbie krawędziowo rozłącznych x-y-ścieżek.

b) Zaproponuj algorytm wyznaczania największej liczby krawędziowo rozłącznych x-y-ścieżek w grafie skierowanym.

c) Zaproponuj algorytm wyznaczania spójności krawędziowej grafu nieskierowanego.

d) Jak wyznaczać spójność wierzchołkową?

7.7 (⚙) Pokryciem wierzchołkowym w grafie nazywamy zbiór wierzchołków, który zawiera co najmniej jeden koniec każdej krawędzi. Sprowadzając do problemu znajdowania maksymalnego przepływu w sieci pokazać, że w dowolnym grafie dwudzielnym rozmiar największego skojarzenia równa się rozmiarowi najmniejszego pokrycia wierzchołkowego.

7.8 (⚙) Pojęcie przepływów w sieciach można w naturalny sposób rozszerzyć na sieci, w których fukcja przepustowości przyjmuje dowolne wartości rzeczywiste dodatnie. Pokaż, że algorytm Forda-Fulkersona nie zadziała dla takich sieci.

Wskazówka: Skorzystaj z sieci poniżej, $r = (\sqrt{5} - 1)/2$, zauważ, że $r^2 = 1 - r$.