MDI 2 Zestaw 8: PLANARNOŚĆ

8.1 Czy graf a) Petersena b) C_{2k}^2, c) C_{2k+1}^2, d) $C_k \,\square\, C_\ell$ jest planarny?

8.2 Graf planarny (prosty, bez pętli i wielokrotnych krawędzi) nazywamy *maksymalnym*, jeśli dołożenie do niego dowolnej krawędzi sprawi, że przestanie on być planarny. *Triangulacja* to graf planarny taki, że w każdej jego płaskiej reprezentacji każda ściana – także zewnętrzna – jest ograniczona trzema krawędziami (jest trójkątem). Pokaż, że graf spójny jest maksymalnym grafem planarnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest triangulacją.

8.3 a) Pokaż, że każdy graf można zanurzyć w $\mathbb{R}^3$, aby żadne dwie krawędzie nie przecinały się.
b) Pokaż, że da się to zrobić tak, aby każdy wierzchołek był punktem o współrzędnych całkowitych, a krawędzie były odcinkami.

8.4 (⚙) Pokaż, że aby zareprezentować każdy graf o n wierzchołkach w taki sposób, jak w zadaniu 6.3 b), potrzebujemy siatki rozmiaru $\Omega(n) \times \Omega(n) \times \Omega(n)$.

8.5 Pokaż, że jeśli zbiór krawędzi C indukuje cykl w grafie płaskim G, to C^*, czyli zbiór krawędzi w G^* odpowiadających krawędziom z C, jest krawędziowym zbiorem rozcinającym w G^*.
Dlaczego implikacja w drugą stronę nie zachodzi i co trzeba zmienić, żeby zachodziła?

8.6 Pokaż, że jeśli G jest spójnym multigrafem płaskim, to G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy G^* jest eulerowski.

8.7 Dla jakich n graf Q_n jest płaski? (Graf Q_n to iloczyn n kopii grafu K_2)

8.8 *Talią* w grafie nazywamy długość najkrótszego cyklu. Jeśli graf jest lasem, przyjmujemy, że jego talia jest nieskończona. Pokaż, że jeśli w multigrafie płaskim o n wierzchołkach talia jest równa $k \geq 3$, to $|E(G)| \leq \frac{k(n-2)}{k-2}$.

8.9 Płaska reprezentacja multigrafu jest samodualna jeżeli jest izomorficzna ze swoim multigrafem dualnym. Pokaż, że
a) jeżeli G jest samodualny to $|E(G)| = 2|V(G)| - 2$,
b) dla każdego $n \geq 4$ znaleźć przykład grafu samodualnego o n wierzchołkach.

8.10 Niech $t(G)$ oznacza grubość grafu prostego G: $t(G) = \min_k\{$ istnieje k grafów prostych $H_1, H_2, \ldots, H_k$ takich, że $E(G) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup \ldots \cup E(H_k)$ oraz $H_1, \ldots H_k$ są planarne $\}$.
Pokaż, że $t(G) \geq \left\lceil \frac{|E(G)|}{3|V(G)|-6} \right\rceil$.

8.11 Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i $3n - 6 + k$ krawędziach ($k > 0$). Pokaż, że grafu G nie da się narysować z mniej niż k parami przecinających się krawędzi.

8.12 Pokaż, że jeśli $|V(G)| \geq 11$, to G lub $\overline{G}$ nie jest grafem planarnym.

8.13 (⚙) Graf nazywamy *zewnętrznie planarnym*, jeśli ma rysunek płaski, w którym każdy wierzchołek jest incydentny ze ścianą zewnętrzną. Scharakteryzuj grafy zewnętrznie planarne (czyli udowodnij analog twierdzenia Kuratowskiego dla tych grafów).

8.14 Udowodnij (bez korzystania z twierdzenia o czterech kolorach) twierdzenie o czterech kolorach dla ubogich: Dla dowolnego ułożenia jednakowych monet na płaszczyźnie definiujemy graf: wierzchołkami tego grafu są monety, między dwoma wierzchołkami jest krawędź gdy odpowiadające im monety się stykają. Wykazać, że liczba chromatyczna takiego grafu nie przekracza 4 oraz że to ograniczenie jest osiągalne.

8.15 Udowodnij, (bez korzystania z twierdzenia o czterech kolorach) że jeśli planarny graf G nie zawiera trójkąta, to $\chi(G) \leq 4$.

8.16 (⚙) Na płaszczyźnie zaznaczono p punktów dowolnie, ale tak, że żadne trzy nie są współliniowe. Następnie połączono te punkty odcinkami, łącząc każdy z każdym. Jaka jest największa liczba regionów, na które można w ten sposób podzielić płaszczyznę?