MDI 2 Zestaw 9: Teoria Ramseya

9.1 Pokaż, że dla dowolnego pokolorowania krawędzi grafu K_6 (K_7) na dwa kolory będą istniały co najmniej dwa (trzy) jednokolorowe podgrafy K_3 (dla K_7 można pokazać, że istnieją nawet cztery).

9.2 Niech q będzie liczbą całkowitą dodatnią. Niech $Q = \binom{2q}{q}$ i załóżmy że każda krawędź grafu K_Q została pomalowana w taki sposób, że nie istnieje żaden jednokolorowy podgraf K_{q+2}. Pokaż, że istnieją podgrafy K_q w każdym z dwóch kolorów.

9.3 Pokaż, że jeśli $R(s-1,t)$ i $R(s,t-1)$ są parzyste, to $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$.

9.4 Pokaż, że jeśli $\binom{n}{t}2^{1-\binom{t}{2}} < 1$, to $R(t) > n$. (Erdős, 1947; jak się dokładniej policzy, to z tego wynika, że $R(t) > 2^{t/2}$).

9.5 Niech $g \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Rozważmy graf pełny na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \ldots, 3g-4\}$. Krawędź ij kolorujemy na czerwono jeśli $|i-j| = 1 \pmod 3$, a na niebiesko w przeciwnym przypadku. Pokaż, że tak pokolorowany graf nie zawiera ani czerwonego trójkąta, ani niebieskiego podgrafu K_g (tzn. $R(3,g) \geq 3(g-1)$).

9.6 Wywnioskuj, że $R(3,4) = 9$.

9.7 Wykaż, że

a) $R(s,t,2) = R(s,t)$,

b) $R(s,t,g) \leq \min\{R(s,R(t,g)), R(t,R(s,g)), R(g,R(t,s))\}$,

c) jeśli $s,t,g > 2$ to $R(s,t,g) < R(s-1,t,g) + R(s,t-1,g) + R(s,t,g-1)$,

d) $R(s,t,g) \leq \frac{(s+t+g-3)!}{(s-1)!(t-1)!(g-1)!}$.

9.8 Wywnioskuj, że $R(3,3,3) \leq 17$.

9.9 Pokaż, że dla każdego k istnieje n_0 takie, że każdy graf spójny o $n \geq n_0$ wierzchołkach zawiera indukowaną gwiazdę o k liściach, indukowaną ścieżkę o k wierzchołkach lub klikę o k wierzchołkach.

9.10 (⚙) Dla dowolnych grafów G i H, przez $R(G,H)$ oznaczamy najmniejszą liczbę n taką, że w każdym kolorowaniu krawędzi grafu pełnego o n wierzchołkach znajdzie się czerwona kopia G lub niebieska kopia H. Pokaż, że jeśli T jest dowolnym drzewem o t wierzchołkach, to $R(T,K_s) = (t-1)(s-1)+1$.

Podpowiedź: Niech T będzie drzewem o t wierzchołkach, a G będzie grafem takim, ze $\delta(G) \geq t-1$. Pokaż, że G zawiera T jako podgraf.