Zadanie 1.7: Pokazać, że jeśli G jest dwuspójny, to dla każdych dwóch jego wierzchołków istnieje cykl zawierający te wierzchołki.

Rozwiązanie: Niech u i v będą dowolnymi różnymi wierzchołkami z G. Pokażemy, że leżą na pewnym cyklu. Udowodnimy to przez indukcję po odległości między u i v.

Najpierw rozważmy przypadek, że u i v sąsiadują. Zauważmy, że skoro graf G jest 2-spójny, to jest też 2-krawędziowo spójny (z nierówności Whitneya), czyli graf $G - uv$ jest spójny. Zatem istnieje w nim ścieżka P od $u$do v. Po dodaniu krawędzi uv, ścieżka ta tworzy w G cykl zawierający u i v.

To załóżmy, że odległość od u do v wynosi $k \geq 2$ i twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich par wierzchołków w odległości co najwyżej $k-1$. Niech v' będzie sąsiadem v na najkrótszej ścieżce do u, zauważmy, że odległość od v' do u wynosi $k-1$, zatem z założenia indukcyjnego istnieje cykl C zawierający u i v'. Jeśli C zawiera też v, udowodnione. Zatem załóżmy, że v nie występuje na C.

Ponieważ G jest 2-spójny, graf $G - v'$ jest spójny. Niech P będzie najkrótszą ścieżką w $G - v'$ od v do zbioru $V(C) \setminus \{v'\}$, przez $x \in V(C)$ oznaczmy jej drugi koniec. Zdefiniujemy cykl:

$$C' := v \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{wzdłuż } P} x \quad \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{wzdłuż } C - \{v'\}} \quad u \quad \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{wzdłuż } C - \{x\}} \quad v'v.$$

Jest to cykl w G zawierający u i v. □