Definicje, twierdzenia, wzory.

G jest grafem o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E. Oznaczamy $n := |V|$ i $m := |E|$.

Spójność.

Def. Graf jest **spójny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v istnieje u-v-ścieżka.
Def. Graf jest k-**spójny**, jeśli $|G| > k$ i dla każdego $V' \subseteq V$, $|V'| < k$ graf $G - V'$ jest spójny.
Def. Spójność wierzchołkowa, ozn. $\kappa(G)$ – największe k, dla którego graf jest k-spójny.
Def. Graf jest k-**spójny krawędziowo**, jeśli $|E| > 0$ i dla każdego $X \subseteq E$, $|X| < k$ graf $G - X$ jest spójny.
Def. Spójność krawędziowa, ozn. $\kappa'(G)$ – największe k, dla którego graf jest krawędziowo k-spójny.
Nierówność Whitneya. $\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$.
Tw. Mengera 1. Dla dowolnych $A, B \subseteq V$, niech k będzie rozmiarem najmniejszego A-B-separatora. W G istnieje k rozłącznych $A - B$ ścieżek.
Tw. Mengera 2. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje k wewnętrznie rozłącznych u-v ścieżek.
Tw. Mengera 3. Graf G jest k-spójny wtw. gdy dla każdego $x \in V$ i $U \in V \setminus \{x\}$, $|U| = k$, istnieje x-U-wachlarz, czyli k wew. rozłącznych ścieżek o początku w x i końcach w różnych wierzchołkach z U.

Obwód Eulera.

Tw. Eulera (wersja z obwodem). Graf spójny ma obwód Eulera wtw. gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.
Tw. Eulera (wersja z drogą). Graf spójny ma drogę Eulera wtw. gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest mniejsza lub równa 2.

Cykl Hamiltona.

Warunek konieczny. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ graf $G - S$ ma co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.
Tw. Diraca (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \ge 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $\deg(v) \ge \frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.
Tw. Orego (warunek dostateczny). Jeśli G jest prosty i $n \ge 3$ oraz dla każdych u, v takich, że $uv \notin E$, zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \ge n$, to G jest hamiltonowski.

Kolorowanie krawędzi.

Tw. Vizinga. $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie wierzchołków.

Def. Zbiór niezależny – zbiór wierzchołków takich, że żadne dwa nie są połączone krawędzią.
Def. Graf G jest **krytyczny**, jeśli dla każdego jego właściwiego podgrafu H zachodzi $\chi(H) < \chi(G)$. Graf jest k-**krytyczny**, jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.
Lemat. Jeśli G jest k-krytyczny, to $\delta(G) \ge k - 1$.
Tw. $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$ (algorytm zachłanny).
Tw. Brooksa Jeśli graf spójny G nie jest nieparzystym cyklem ani grafem pełnym, to $\chi(G) \le \Delta(G)$.
Tw Mycielskiego. Dla każdego k istnieje graf G_k bez trójkątów taki, że $\chi(G_k) = k$.
Def. Talią grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie.
Tw. Erdősa Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ istnieje graf G taki, że $\chi(G) \ge k$ i talia grafu G jest co najmniej ℓ.

Skojarzenia.

Def. Skojarzeniem nazywamy zbiór rozłącznych krawędzi grafu. Skojarzeniem **maksymalnym** nazywamy skojarzenie, które nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Skojarzeniem **największym** nazywamy najliczniejsze skojarzenie. Skojarzeniem **doskonałym** nazywamy skojarzenie, które pokrywa każdy wierzchołek.
Def. Ścieżką naprzemienną względem skojarzenia M nazywamy ścieżkę, której krawędzie na przemian należą i nie należą do M. Ścieżka jest **powiększająca** względem skojarzenia M, jeśli jest naprzemienna względem M oraz zaczyna i kończy się w wierzchołku niepokrytym przez M.
Tw. Berge'a. Skojarzenie M jest największe wtw, gdy nie ma ścieżki powiększającej względem M.
Tw. Halla. Niech G będzie grafem dwudzielnym o klasach dwudzielności X, Y. W G istnieje skojarzenie pokrywające X wtw, gdy dla każdego $X' \subseteq X$ zachodzi $|N(X')| \ge |X'|$.

Sieci i przepływy.

Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią, $G = (V, A)$. Dla funkcji $f : A \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ definiujemy:

- Dla $v \in V$: $f^+(v) := \sum_{u: vu \in A} f(vu)$ i $f^-(v) := \sum_{u: uv \in A} f(uv)$
- Dla $S \subseteq V$: $f^+(S) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(uv)$ i $f^-(S) := \sum_{\substack{vu \in A \\ u \in S \\ v \notin S}} f(vu)$

Def. Funkcję $f : A \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ nazywamy **przepływem**, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \le c(a)$ oraz dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) = f^-(v)$.
Def. Wartość przepływu f to $\operatorname{val} f := f^+(s) - f^-(s)$.
Fakt. $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.
Def. Dla dowolnego $S \subseteq V$ takiego, że $s \in S$ i $t \in \overline{S} := V \setminus S$, **przekrojem** $(S, \overline{S})$ nazywamy zbiór krawędzi o początku w S i końcu w $\overline{S}$. **Przepustowością** przekroju $K = (S, \overline{S})$ nazywamy $\operatorname{cap} K := \sum_{a \in K} c(a)$.
Lemat. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju $(S, \overline{S})$ zachodzi $\operatorname{val} f = f^+(S) - f^-(S)$.
Tw. Dla dowolnego przepływu f i dowolnego przekroju K zachodzi $\operatorname{val} f \le \operatorname{cap} K$.
Def. Dla ścieżki P (niekoniecznie skierowanej), przepływu f i łuku a z P definujemy:

$$r(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w przód,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ jest krawędzią w tył.} \end{cases}$$

Dla ścieżki P definiujemy $r(P) := \min_{a \text{ - łuk } P} r(a)$.

Ścieżka P jest **powiększająca** jeśli jest s-t ścieżką i $r(P) > 0$. Wówczas można zdefiniować przepływ $\hat{f}(a)$ jako:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w przód,} \\ f(a) - r(P), & \text{jeśli } a \in A(P) \text{ jest łukiem w tył} \\ f(a), & \text{jeśli } a \notin A(P). \end{cases}$$

Tw. Forda-Fulkersona. Przepływ f jest największy wtw. gdy nie ma ścieżki powiększającej.
Wniosek Jeśli f^* jest największym przepływem, a $\widetilde{K}$ najmniejszym przekrojem, to $\operatorname{cap} \widetilde{K} = \operatorname{val} f^*$.

Planarność.

Tw. Kuratowskiego. Graf G jest planarny wtw. gdy nie zawiera podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5.
Tw. Dla grafu płaskiego G zachodzi $\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2m$, gdzie przez $F(G)$ oznaczamy zbiór regionów (ścian) grafu płaskiego G.
Formuła Eulera. Dla spójnego grafu płaskiego G zachodzi $n - m + |F(G)| = 2$.
Lemat. Dla prostego grafu planarnego G o $n \ge 3$ wierzchołkach i talii k zachodzi $m \le k(n-2)/(k-2)$.
Wniosek. Dla prostego grafu planarnego G o $n \ge 3$ wierzchołkach zachodzi $m \le 3n - 6$.
Wniosek. Każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia co najwyżej 5.
Tw. Heawooda. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \le 5$.
Tw. o czterech kolorach. Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \le 4$.
Def. Dla grafu płaskiego G, jego **grafem dualnym** G^* nazywamy graf, którego wierzchołkami są regiony G i istnieje bijekcja między $E(G^*)$ a $E(G)$: krawędź e^* łączy dwa wierzchołki f_1, f_2 w G^* wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź e z G jest incydentna z f_1 i f_2.

Teoria Ramseya.

Def. Liczba Ramseya, ozn. $R(t)$, to najmniejsze n takie, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi K_n znajdziemy jednokolorową kopię K_t.
Przez $R(s, t)$ oznaczamy najmniejsze n takie, że przy dowolnym kolorowaniu K_n na czerwono i niebiesko znajdziemy czerwoną kopię K_s lub niebieską K_t.
Tw. Ramseya (Erdősa-Szekeresa). Dla każdego t zachodzi $R(t) \le 4^t$.
Tw. Erdősa. Dla $t \ge 3$ zachodzi $R(t) > 2^{t/2}$.
Tw. Dla $s, t > 1$ zachodzi $R(s, t) \le R(s, t-1) + R(s-1, t)$.
Wniosek. Dla $s, t \ge 1$ zachodzi $R(s, t) \le \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$.