ELiTM 0 Indukcja

Zasada minimum Każdy niepusty podzbiór liczb naturalnych zawiera liczbę najmniejszą.

Zasada indukcji Jeżeli
(1) istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że $T(n_0)$ jest prawdziwe;
(2) z faktu, że $T(n)$ jest prawdziwe dla $n \geqslant n_0$ wynika, że $T(n+1)$ jest prawdziwe;
to $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geqslant n_0$.

Zasada silnej indukcji
Jeżeli z faktu, że $T(n_0), T(n_0+1), \ldots T(n-1), T(n)$ są prawdziwe wynika, że $T(n+1)$ jest prawdziwe, to $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geqslant n_0$.

Udowodnić indukcyjnie wzór:

0.1 $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + .. + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}$,

0.2 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$,

0.3 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$,

0.4 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = \frac{1}{4}(1+n)^2 n^2$,

0.5 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$,

0.6 $2^3 + 4^3 + \ldots (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$,

0.7 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots n \cdot n! = (n+1)! - 1$,

0.8 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + .. + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geqslant 2$,

0.9 $n^3 < 4^n$,

0.10 $3^n > n2^n$,

0.11 $5n \leqslant n^2 - 3$ dla $n \geqslant 6$,

0.12 $8 | 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$,

0.13 $8 | 11^n - 3^n$,

0.14 $11 | 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$,

0.15 $133 | 11^{n+2} + 12^{2n+1}$,

0.16 $9 | 4^n + 24n - 1$.

0.17 Udowodnić indukcyjnie, że suma kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta $(n \geqslant 3)$
wynosi $(n-2)\pi$.

0.18 Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : 2 | n^2 - 3n + 3\}$. Wykazać, że jeśli $n \in A$ to $n+1 \in A$. Znaleźć dowolny element zbioru A.

0.19 Dany jest ciąg $a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$. Napisać i udowodnić ogólny wzór ciągu.

0.20 Sadzamy $2n$ dzieci do n wagoników po dwoje. Na ile sposobów można to zrobić?

0.21 Na ile najwięcej kawałków można podzielić pizzę przy pomocy n cięć. Znaleźć rekurencyjną zależność oraz wzór ogólny, udowodnić indukcyjnie poprawność tego wzoru.

0.22 Udowodnić, że aby połamać czekoladę o wymiarach p na r aby były same kawałki 1 na 1 potrzeba $p \cdot r - 1$ złamań oraz że ta liczba nie zależy od sposobu łamania.

0.23 Udowodnić, ze istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

0.24 Udowodnić indukcyjnie, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można w sposób jednoznaczny przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych.

0.25 Udowodnić, że liczy Fermata F_n są parami względnie pierwsze. $F_n = 2^{2^n} + 1$ dla $n \geqslant 0$.

0.26 Udowodnimy indukcyjnie, że wszystkie koty są tego samego koloru. Krok pierwszy: Weźmy jednego kota. Jest on tego samego koloru co on sam.
Krok indukcyjny: Załóżmy że każde n kotów jest tego samego koloru. Pokażemy, że wtedy każde $n+1$ kotów jest tego samego koloru.
Weźmy $n+1$ kotów. Bez pierwszego będzie ich n, zatem są tego samego koloru na mocy założenia indukcyjnego. Bez ostatniego też jest ich n, więc są tego samego koloru. środkowe koty nie zmieniają koloru, więc wszystkie $n+1$ muszą mieć ten sam kolor. Na podstawie indukcji matematycznej wykazaliśmy, że wszystkie koty mają ten sam kolor.
Jaki to kolor?