ELiTM 2 Rachunek predykatów

2.1 Czy podane zdania są prawdziwe? (uwaga pytanie może być podchwytliwe) Zmienne oznaczają liczby rzeczywiste.

a) $(\exists y)\ y^2 < 0$, b) $\forall x \exists y\ x \cdot y = x$, c) $\forall x \exists y\ x \cdot y = y$, d) $\exists y \forall x\ x \cdot y = x$,
e) $\exists y \forall x\ x \cdot y = y$, f) $\forall x \exists y\ x \cdot y = 1$, g) $\exists y \forall x\ x \cdot y = 0$, h) $\exists y \forall x\ x \cdot y = 1$,
i) $(\forall x) xy = 7$, j) $(\forall x) x \in \emptyset \Rightarrow x > 0$.

2.2 Sprawdzić, czy prawdziwe są następujące formuły:

a) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\forall x)p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x))$,
b) $(\forall x)(p(x) \Leftrightarrow q(x)) \Rightarrow ((\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)q(x))$,
c) $(((\forall x)\phi(x)) \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\exists x)(\phi(x) \Rightarrow \psi)$, gdzie ψ nie zawiera x jako zmiennej wolnej,
d) $(\forall y)(\exists x)\phi(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\phi(x,y)$,
e) $((\exists x)(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow ((\exists x)\phi(x) \Rightarrow (\exists x)\psi(x))$,
f) $((\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow (\forall x)\psi(x)) \Rightarrow (\forall x)(\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x))$,
g) $((\forall x)\phi(x) \Rightarrow (\forall x)\psi(x)) \Rightarrow (\forall x)(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))$,
h) $((\exists x)(\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x))) \Rightarrow ((\exists x)\phi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\psi(x))$,
i) $(\forall x)\phi(x) \Rightarrow (\exists x)\psi(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))$

2.3 Przekształcić następujące formuły tak, aby wszystkie kwantyfikatory znalazły się na początku formuły:

a) $(\forall x)(\exists y)\phi(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\phi(x,y)$,
b) $((\exists x)(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow ((\exists x)\phi(x) \Rightarrow (\exists x)\psi(x))$,
c) $(\exists x)\phi(x) \Leftrightarrow (\forall x)\psi(x,y)$.

2.4 Zdanie

$$\sim (\forall x)(\exists y)(\forall z)((\phi(x,y,z) \Rightarrow \psi(x,y,z)) \vee \psi(x,y,z))$$

przekształcić równoważnie tak, by ze spójników zdaniowych występowały w nim jedynie negacja i koniunkcja.

2.5 Udowodnić podane formuły dla kwantyfikatorów ograniczonych, korzystając z tautologii dla kwantyfikatorów nieograniczonych.

a) $[(\forall x)_{\alpha(x)}\phi(x) \wedge (\forall x)_{\alpha(x)}\psi(x)] \Leftrightarrow (\forall x)_{\alpha(x)}(\phi(x) \wedge \psi(x))$
b) $\sim (\exists x)_{\alpha(x)}\phi(x) \Leftrightarrow (\forall x)_{\alpha(x)} \sim \phi(x)$

2.6 Podać interpretację symbolu α tak aby podane zdania były prawdziwe (1), nieprawdziwe (2)

a) $(\exists x)(\forall y)\alpha(x,y)$
b) $(\forall x,y,z)[\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,z) \Rightarrow \alpha(x,z)]$
c) $(\forall x,y)\alpha(x,y) \Leftrightarrow (\forall x)\alpha(x,x)$
d) $(\exists x)(\forall y)\alpha(x,y) = y$

2.7 Podane zdania zapisać jako formuły rachunku zdań. Można używać symboli: spójników logicznych, kwantyfikatorów, zmiennych będących liczbami naturalnymi oraz symboli podanych w nawiasach, (można też definiować symbole pomocnicze).

a) *x jest podzielnikiem y* (symbole: $=, <, \cdot$),

b) *x jest liczbą pierwszą* ($=, <, \cdot, 1$),

c) *dowolne dwie liczby mają najmniejszą, wspólną wielokrotność* ($=, <, \cdot$),

d) *dowolne trzy liczby mają największy, wspólny podzielnik* ($=, <, \cdot$),

e) *nie istnieje największa liczba* ($\leqslant$),

f) *nie istnieje największa liczba pierwsza* ($=, <, \cdot$),

g) *istnieje największa liczba parzysta* ($=, \leqslant, +$),

h) *między dwiema liczbami parzystymi istnieje liczba nieparzysta* ($=, \leqslant, +, 1$),

i) *każda liczba, która jest sumą dwóch kwadratów jest podzielna przez 3* ($=, +, \cdot$),

j) *każda liczba parzysta jest sumą dwóch kwadratów* ($=, \cdot, +$),

k) *istnieje liczba o dokładnie trzech podzielnikach* ($=, \cdot$),

l) *istnieje liczba, która nie jest kwadratem liczby nieparzystej* ($=, \cdot, +$),

m) *dla każdej liczby nieparzystej istnieje większa od niej liczba parzysta* ($<, +$),

2.8 Polecenie jak wyżej z tą różnicą, że zmienne oznaczają liczby rzeczywiste:

a) *nie istnieją ujemne kwadraty* ($<, \cdot, 0$),

b) *iloczyn dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą dodatnią* ($<, \cdot, 0$),

c) *każda liczba dodatnia ma kwadratowy pierwiastek* ($=, <, \cdot, 0$),

d) *każde równanie liniowe ma rozwiązanie* ($=, 0, \cdot, +$),

e) *każde równanie liniowe ma jednoznaczne rozwiązanie* ($=, 0, \cdot, +$),

f) *istnieje wielomian stopnia 2 o dokładnie dwóch rozwiązaniach* ($=, 0, \cdot, +$),

g) *liczba x jest dodatnia* ($=, 0, \cdot, +$), ($>, \cdot, +$)

h) *zbiór liczb rzeczywistych jest zamknięty ze względu na dzielenie* ($=, >, \cdot, 0$).

i) *jeśli liczba ma pierwiastek kwadratowy to jest dodatnia* ($=, >, \cdot, 0$).