ELiTM 3 Zbiory

3.1 Ile jest różnych zbiorów pośród podanych:
$\{1,2,3,1,3,2,4\}$, $\{1,3,4,\sqrt{4},2\cdot 3\}$, $\{\frac{9}{3},2,3,4,(-1)^2,3\ +\ 1\}$,$\{1,2,3,4\}$.

3.2 Czy prawdziwe jest zdanie
a) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\subseteq\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$
b) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\in\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
c) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\subseteq\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
d) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\in\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$
e) $\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}\in\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$

3.3 Niech
a) $A=\{\{X\},\emptyset\}$ i $B=\{\emptyset,\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset\}\}$.
b) $A=\{X,\{\emptyset\}\}$ i $B=\{\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset\},\{\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset\}\}\}$.
Jakiemu zbiorowi musi być równy X, by $A\in B$? A jakiemu by $A\subseteq B$?

3.4 Podać przykład zbioru dwuelementowego takiego, że każdy jego element jest również jego podzbiorem.

3.5 Czy jest prawdą dla wszystkich $a, A, B, \mathcal{A}$?
a) jeśli $a\in A$ i $A\in\mathcal{A}$ to $a\in\mathcal{A}$?
b) jeśli $a\in A$ i $A=B$ to $a\in B$?
c) jeśli $a\in A$ i $A\neq B$ to $a\notin B$?
d) jeśli $a\notin A$ i $A\neq B$ to $a\in B$?
e) jeśli $a\in A$ i $A\subseteq\mathcal{A}$ to $a\in\mathcal{A}$?
f) jeśli $a\subseteq A$ i $A\in\mathcal{A}$ to $a\in\mathcal{A}$?

3.6 Udowodnić na podstawie definicji:
a) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$,
b) $A\subseteq X\wedge B\subseteq X\Rightarrow A\cup B\subseteq X$,
c) $Y\subseteq A\wedge Y\subseteq B\Rightarrow Y\subseteq A\cap B$,
d) $Y\subseteq A\wedge Y\cap B=\emptyset\Rightarrow Y\subseteq A-B$,
e) $A\cap B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq(-B)\cup C$,
f) $A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A\cap(-B)\subseteq C$.

3.7 Jakie relacje zachodzą między zbiorami A i B jeśli:
a) $A\cup B=\emptyset$,
b) $A-B=\emptyset$,
c) $A-B=B-A$.

3.8 Niech $p(x), q(x)$ będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych i niech $r(x)=p^2(x)+q^2(x)$. Jakie relacje inkluzji zachodzą między zbiorami pierwiastków tych wielomianów.

3.9 Czy podane równości są prawdziwe. Prawdziwe udowodnić. Dla fałszywych podać kontrprzykład oraz zależności miedzy zbiorami A, B, C, D aby równości były prawdziwe.
$A \div B = (A - B) \cup (B - A)$.
a) $A \setminus [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] = A \cap (B \cup -C) \cap (C \cup -B)$,
b) $(A \setminus C) \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (B \cup A)$,
c) $A \cup (B - C) = [(A \cup B) - C] \cup (A \cap C)$,
d) $[(A \cap B) \setminus C] \cup [(A \cap C) \setminus B] = [A \cap (B \cup C)] \setminus (B \cap C)$
e) $\{[(A \cup D) \cap C] \cup B\} \setminus D = [(A \setminus D) \cap C] \cup (B \setminus D)$,
f) $\{[(A \cap D) \cup C] \cap B\} \setminus D = [(A \setminus D) \cup C] \cap (B \setminus D)$,
g) $[(A \cap B) \cup (C \setminus D)] \cap (D \setminus A) = (C \cap D) \setminus (A \cup B)$.
h) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
j) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$,
k) $(A \times Y) \cap (B \times X) = A \times B$ dla $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$,
l) $A \times B = B \times A$,
m) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
n) $2^{X \cap Y} = 2^X \cap 2^Y$,
o) $2^{X \cup Y} = 2^X \cup 2^Y$,
p) $A = B \Leftrightarrow A \div B = \emptyset$,
r) $A \div C \subseteq (A \div B) \cup (B \div C)$,
s) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$,
t) $C \div (B \setminus A) = (A \cap C) \cup [(B \cup C) \setminus (A \cup (B \cap C))]$
u) $(B \div C) \cap (A \cup B) = [B \div (C \cap A)] \setminus (C \cap B \cap A')$

3.10 Wyznaczyć X jeśli $A - X = B$ oraz $X - A = C$.

3.11 Niech $-A = X \setminus A, -B = Y \setminus B$. Wyrazić $-(A \times B)$ za pomocą $-A, -B, X, Y$.

3.12 Przedstawić podane zbiory jako iloczyn kartezjański:
a) Kwadrat na płaszczyźnie o boku o wierzchołkach (-1,4), (2,4),
b) Sześcian w przestrzeni o krawędzi o wierzchołkach (2,1,-2), (2,1,3),
c) Walec wysokości 1 i podstawie o promieniu 1.

3.13 Czy kulę można przedstawić jako iloczyn kartezjański ?