ELiTM 4 Sumy i przecięcia rodzin zbiorów

4.1 Znaleźć $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ dla podanych rodzin zbiorów:

a) $A_i = (0; \frac{1}{i+1})$, b) $A_i = (0; \frac{1}{i+1}]$, c) $A_i = [0; \frac{1}{i+1}]$, d) $A_i = (i; \infty)$

e) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le \frac{1}{i+1}\}$ f) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \ge 0, y \le x^i\}$.

4.2 Znaleźć $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ dla podanych rodzin zbiorów:

a) $A_i = (i; \infty)$, b) $A_i = (\frac{1}{i+1}; 1 - \frac{1}{i+1}]$; , c) $A_i = (-i; i)$,

d) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le i\}$, e) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le \frac{1}{i+1}\}$,

f) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \ge 0, y \le x^i\}$.

4.3 Wyznaczyć $\bigcup_a \bigcap_b X_{a,b}$, $\bigcap_a \bigcup_b X_{a,b}$, $\bigcap_b \bigcup_a X_{a,b}$, $\bigcup_b \bigcap_a X_{a,b}$ dla podanych rodzin zbiorów:

a) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \ \wedge 0 \le y \ \wedge \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \le 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\ a, b > 0$,

b) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le a(x-b)\}$, $a, b \in \mathbb{R}$,

c) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le ax(x-b)\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$,

d) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge \frac{a}{b^2}x(x-2b)\}$, $a, b > 0$,

e) $X_{a,b} = \{x \in \mathbb{R} : a - \frac{1}{b} \le x < a + \frac{1}{b}\}$, $a \in \mathbb{Z}$, $\ b \in \mathbb{N} - \{0\})$,

f) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \le ax^2 + b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\ a < 0$, $\ b > 0$,

g) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a(x-b)^3 + b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\ a, b > 0$,

h) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge e^{a(x-b)}\}$, $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\ a, b > 0$,

i*) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{+2} : ax^2 < y \le \sqrt[3]{ab^2}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\ a, b > 0$,

4.4 Niech C będzie okręgiem o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych. Dla punktu $x \in C$ niech l_x oznacza prostą styczną do C przechodzącą przez x, a R_x otwartą półpłaszczyznę zawierającą początek układu współrzędnych wyznaczoną przez l_x. Znaleźć: a) $\bigcap_{x\in C} R_x$, b) $\bigcap_{x\in C-\{x_0\}} R_x$, gdzie $x_0 \in C$, c) $\bigcap_{x\in C-C_0} R_x$, gdzie C_0 jest pewnym łukiem C.

4.5 Jakie relacje inkluzji zachodzą pomiędzy zbiorami ? Dla inkluzji przeciwnych pokazać kontrprzykład.

a) $\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{i\in I} B_i$ i $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i)$

b) $\bigcap_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{i\in I} B_i$ i $\bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$

c) $\bigcup_{i\in I}(A_i - B_i)$ i $\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcap_{i\in I} B_i$

d) $\bigcap_{i\in I}(A_i \cup -B_i)$ i $\bigcap_{i\in I} A_i \cup -\bigcup_{i\in I} B_i$

4.6 Udowodnić, że

a) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J}(A_i \times B_j)$,

b) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{i\in I} \bigcap_{j\in J}(A_i \times B_j)$,

4.7 Znaleźć nieskończoną rodzinę $\mathcal{X}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ taką, że $\bigcap \mathcal{X} = \emptyset$ oraz $\bigcap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ dla dowolnej właściwej podrodziny $\mathcal{Y}$ rodziny $\mathcal{X}$.

4.8 Niech $(A_i : i \in \mathbb{N})$ będzie ciągiem zbiorów. Skonstruować ciąg zbiorów $(B_i : i \in \mathbb{N})$ taki, że $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ i $\bigcup_i B_i = \bigcup_i A_i$. Jak zmieni się konstrukcja jeśli założymy $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$?

4.9* Udowodnić, że jeśli $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ i $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ to $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \cup \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$.