ELiTM 5 Relacje

5.1 Niech $A = \{a, b, c, d, e\}$. Relację R zdefiniujmy jako:
$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), \ (b, d), (a, d), (c, d), (e, e), (a, c), (e, d)\}$. Narysuj graf tej relacji. Czy relacja jest zwrotna, symetryczna, przechodnia, antysymetryczna, przeciwzwrotna? Jak należałoby uzupełnić relację, lub które pary z niej usunąć, żeby miała wcześniej wymienione własności?

5.2 Zaznacz w tabeli, które z wymienionych relacji są zwrotne, symetryczne, przechodnie, antysymetryczne i przeciwzwrotne :

	zwrotna	symetryczna	przechodnia	antysymetryczna	przeciwzwrotna
$=$					
$\neq$					
$<$					
$\leqslant$					
$\subseteq$					
$\mid$					
$\parallel$					
$\perp$					
S					
P					
K					
$\emptyset$					
F					
A					
B					
C					
M					
D					
E					

Gdzie:

$=, \neq, <, \leqslant$ określone są na zbiorze $\mathbb{N}$ i zdefiniowane zgodnie z przyjętym znaczeniem

$\subseteq$ oznacza zawieranie w zbiorze podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$

$\mid$ oznacza relację podzielności na zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$

$\parallel$ i $\perp$ oznaczają prostopadłość i równoległość prostych na płaszczyźnie

$xSy \Leftrightarrow x$ jest synem y

$xPy \Leftrightarrow x$ jest potomkiem y

$xKy \Leftrightarrow x$ i y mają wspólną babkę

$\emptyset$ oznacza relację pustą

F oznacza relację pełną

$xAy \Leftrightarrow 2|x + y$ gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$,

$xBy \Leftrightarrow 3|x + y$ gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$

$xCy \Leftrightarrow 3|x - y$ gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$

$xMy \Leftrightarrow n|x - y$ gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$ i n jest ustaloną liczbą naturalną

$xDy \Leftrightarrow xy = 4$ gdzie $x, y \in \mathbb{R}$

$xEy \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ gdzie $x, y \in \mathbb{R}$

5.3 Podać przykłady relacji która jest:

a) przeciwzwrotna i symetryczna, ale nie jest przechodnia,

b) przechodnia i symetryczna, ale nie jest zwrotna,

c) przechodnia i zwrotna, ale nie jest antysymetryczna.

d) symetryczna i przechodnia, ale nie jest zwrotna.

5.4 Które spośród podanych relacji są relacjami równoważności. Podać klasy abstrakcji.

a) dla $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow xy$ jest liczbą parzystą,

b) dla $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow xy$ jest liczbą nieparzystą,

c) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow (\exists\, q \in \mathbb{Q})\ x \cdot q = y$.

d)dla $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ jest postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$,

e) dla $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, $A \sim B \Leftrightarrow A \div B$ jest zbiorem skończonym,

f) dla $A, B \subseteq \{1, \ldots, 100\}$, $A \sim B \Leftrightarrow |A \div B|$ jest liczbą parzystą,

g) dla $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, $A \sim B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$,

h) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow \mid x - y \mid < 1$,

i) dla $(x, y), (z, u) \in \mathbb{R}^2$, $\ (x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + u^2$,

j) dla $A, B \subseteq X$, $A \sim B \Leftrightarrow A \cup -B = X$,

k) dla $A, B, C \subseteq X$, $A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \supset C$,

l) dla $p, q \in \mathbb{R}[x]$ $p \sim q \Leftrightarrow p(x) \cdot q(x)$ jest wielomianem parzystego stopnia.

5.5 Niech R i S będą relacjami równoważności w zbiorze X. Czy $R \cup S$ and $R \cap S$ są relacjami równoważności ? Jeśli tak to jakie relacje inkluzji zachodzą pomiędzy ich klasami abstrakcji.

5.6 Niech $\mathcal{X} = \{[n; n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$. Zdefiniować relacje równoważności $\sim$ tak, aby $\mathbb{R}/_{\sim} = \mathcal{X}$

Złożenie relacji definiuje się następująco: $xS \circ Tz \Leftrightarrow \exists y\ xTy \wedge ySz$

5.7 Znaleźć złożenie relacji $R \circ R$ dla $=, <, \perp, S$

5.8 Znaleźć relacje $\perp \circ \parallel$, $S \circ B$ i $B \circ S$ gdzie S jest zdefiniowana w zadaniu 2 a $xBy \Leftrightarrow x$ jest bratem y.

5.9 Udowodnić, ze R jest relacją przechodnią, wtedy i tylko wtedy gdy $R \circ R = R$.

5.10 Udowodnić, ze R jest relacją symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{-1} = R$.

5.11 Niech R będzie relacją równoważności. Czy R^{-1}, $R \circ R$ są relacjami równoważności ?

5.12 Opisać wszystkie relacje, które jednocześnie są symetryczne i antysymetryczne.

5.13 Dla binarnej relacji R w zbiorze X oraz podzbioru $Y \subseteq X$ niech $R_{|Y}$ będzie relacją w Y zdefiniowana następująco

$$R_{|Y} = R \cap (Y \times Y).$$

Które z własności relacji R są dziedziczne na R_Y ?

5.14 * Dla binarnej relacji R w X i $x, y \in X$ niech xSy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taki, że $x_1 = x, x_n = y$ i $x_i R x_{i+1}$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n-1$.
Udowodnić, ze S jest najmniejsza relacją przechodnią zawierającą R.