ELiTM 6 Funkcje

6.1 Które z podanych relacji są funkcjami? Znaleźć ich dziedziny i zbiory wartości. Które z nich są różnowartościowe?

a) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^3 = y^4$,

b) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow \frac{y-1}{x} = 1$,

c) dla $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x, y)Sz \Leftrightarrow x + y + z^2 = 1$

d) dla $x, y \in \mathbb{N}$, $xUy \Leftrightarrow x$ jest największym pierwszym podzielnikiem y,

e) dla wielomianu p i $x \in \mathbb{R}$, $pTx \Leftrightarrow p(x) = 0$,

f) dla $A, B \subseteq X$, $A\mathcal{F}B \Leftrightarrow A \cup B = X \ i \ A \cap B = \emptyset$,

g) dla $A \subseteq \mathbb{N}, x \in N$, $A\mathcal{G}x \Leftrightarrow x$ jest iloczynem wszystkich elementów z A,

h) dla trójmianu o współczynnikach rzeczywistych f i $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\mathcal{V}A \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})x \in A \Leftrightarrow f(x) = 1$,

i) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $xVy \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{R})\ y = \frac{x+z}{2}$

6.2 Dla funkcji f i podzbioru A jej dziedziny znaleźć obraz $f(A)$ i przeciwobraz obrazu $f^{-1}(f(A))$

a) $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$, $A = [-2; 3)$,

b) $f(x) = \cos x$ for $x \in \mathbb{R}$, $A = [-\pi/2; \pi/2]$,

c) $f(x, y) = x + y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(0, 0), (0, 1)\}$.

d) $f(x, y) = x \cdot y$ for $x, y \in \mathbb{N}$, $A = [0, \infty) \times [0, \infty)$

e) $f(x, y) = x^2 - y^2$ for $x, y \in \mathbb{N}$, $A = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

f) $f(x, y) = \frac{x}{y+1}$ dla $x, y \in \mathbb{N}$, $A = \{(1, 2)\}$.

g) $f(x, y) = (x + y, x - y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

h) $f(x, y) = x^2 + y^2$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2 \wedge 0 < y < 1\}$.

i) $f(x, y) = \max(x, y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

j) $f(p) = p(1)$ dla wielomianu p o współczynnikach rzeczywistych, A jest rodziną wszystkich funkcji liniowych postaci $ax - a$.

k) $f(n) =$ suma wszystkich pierwszych podzielników liczby n dla $n \in \mathbb{N}$, $A = \{4, 6\}$,

l) $f(X) = X \times X$ dla $X \subseteq \mathbb{R}$, $A = \{[-x; x] : x \in \mathbb{R}\}$,

m) $f(X) = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y)(x, y) \in X\}$ dla $X \subseteq \mathbb{R}^2$, A jest rodziną wszystkich zbiorów jednoelementowych.

6.3 Która inkluzja jest prawdziwa? Prawdziwą udowodnić, dla fałszywej znaleźć kontrprzykład. Udowodnić zachodzenie obu inkluzji w przypadku gdy f jest bijekcją.

$f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$ czy $f(A - B) \subseteq f(A) - f(B)$?

6.4 Niech X będzie skończonym zbiorem i niech $f : X \to X$. Udowodnić, że istnieje $A \subseteq X$ takie, że $f(A) = A$.

6.5 Podane zdania zapisać jako formuły rachunku zdań. Można używać symboli: spójników logicznych, kwantyfikatorów, zmiennych, oraz symboli: $\in, \mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leqslant, <, =, \cdot, +, -$.

a) Funkcja f jest rosnąca.

b) Funkcja f jest rosnąca lub malejąca.

c) Funkcja f jest ograniczona.

d) Funkcja f osiąga maksimum.

e) Funkcja f osiąga maksimum dokładnie jedno maksimum.

f) Funkcja f osiąga maksimum lub minimum.

g) Jeśli funkcja osiąga maksimum to jest ograniczona od góry.

h) Funkcja rosnąca nie posiada extremum.

i) Funkcja rosnąca jest różnowartościowa.

j) Funkcja ograniczona od góry nie musi mieć maksimum.

k) Nie istnieje parzysta funkcja rosnąca.