ELiTM 7 Zbiory Uporządkowane

7.1 Narysować diagram Hassego poniższych zbiorów uporządkowanych. Wskazać, o ile istnieją elementy minimalne, maksymalne, najmniejszy, największy.

a) $|$ (podzielność) w zbiorze (i) $\{2, 3, 4, \ldots, 15, 16\}$, (ii) $\{p \in \mathbb{N}^+ : p|96\}$,

b) $\subseteq$ (inkluzja) w

(i) zbiorze podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ o parzystej liczbie elementów,

(ii) w zbiorze $\{K((i, i), r_i) : i = 0, 1, \ldots, n\}$ kul otwartych o środkach w punktach (i, i) oraz promieniach r_i, gdzie $r_i = 2\sqrt{2}$ dla parzystych i oraz $r_i = \sqrt{2}$ dla nie parzystych i,

(iii) w zbiorze $\{[n, n + i] \subset \mathbb{R} : n \in \{0, .., 3\}, i \in \{1, .., 4\}\}$

7.2 Udowodnić że podane zbiory wraz z relacjami tworzą zbiory częściowo uporządkowane, narysować diagramy Hassego, podać wzory na sup oraz inf par elementów o ile to możliwe.

a) $(\{[n; n + i] : n = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2, 3\}, \preceq)$, gdzie $[a; b] \preceq [c; d] \;\Leftrightarrow\; b < c \vee [a; b] = [c; d]$,

b) $(\mathcal{P}(\{1, .., 4\}), \preceq)$, gdzie $A \preceq B \Leftrightarrow A \subset B \wedge \max B \notin A$,

c) $(\{k \in \mathbb{N}^+ : k|144\}, \preceq)$, gdzie $x \preceq y \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}^+\ 2ix = y \vee x = y$.

7.3 Niech $(P, \leqslant_P)$ i $(Q, \leqslant_Q)$ będą zbiorami uporządkowanymi. Udowodnić, ze relacja $\preceq$ określona w $P \times Q$ zdefiniowanym następująco: $(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a \leqslant_P c \wedge b \leqslant_Q d$ jest relacją porządku. Narysować diagram Hassego dla:

a) $P = Q = \{0, 1, 2, 3\}^2$, uporządkowanych przez zwykłą relację $\leqslant$,

b) $P = \{a, b, c\}$, $Q = \{x, y, z\}$, gdzie $a <_P b >_P c$, $x >_Q y <_Q z$.

Jaka zależność zachodzi między elementami minimalnymi (maksymalnymi) w $P \times Q$ i elementami minimalnymi (maksymalnymi) w P i w Q?

7.4 Niech P będzie skończonym zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$. Udowodnić, że dla każdego elementu $p \in P$ istnieją elementy x, y takie, że x jest elementem minimalnym w P, y jest elementem maksymalnym w P i $x \leqslant p \leqslant y$.

7.5 Wskazać zbiór uporządkowany o dokładnie jednym elemencie minimalnym i nie zawierający elementu najmniejszego.

7.6 Wskazać zbiór uporządkowany, który zawiera antyłańcuch dowolnej wielkości, ale nie zawiera antyłańcucha nieskończonego.

7.7 Dla zbioru uporządkowanego P i jego podzbioru X niech X^*, X_* oznacza odpowiednio $\{p \in P : (\forall x \in X) x \leqslant p\}$ i $\{p \in P : (\forall x \in X) p \leqslant x\}$. Znaleźć X^*, X_*, $(X^*)_*$, $(X_*)^*$ gdzie

a) $P = \mathbb{N}$, $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$, $X = \{12, 16, 24\}$,

b) $P = \mathcal{P}(A)$ uporządkowane przez $\subseteq$, $X = \{B, C, D\}$, gdzie $B, C, D \subseteq A$,

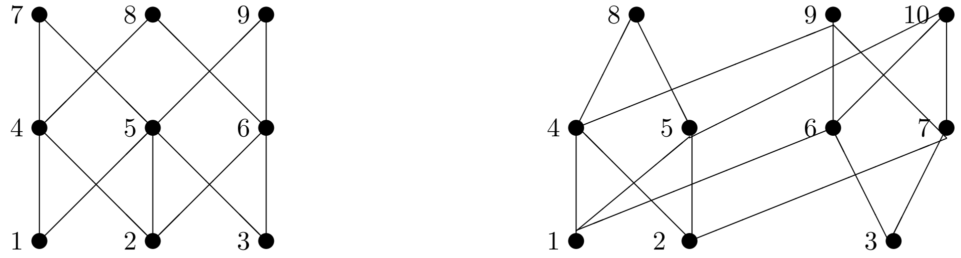
c) $X = \{[2; 3], [3; 4]\}$ w porządku zdefiniowanym w zadaniu 7.2a).

7.8 Znaleźć $\emptyset^*$ i $\emptyset_*$.

7.9 Niech $X \subseteq Y \subseteq P$. Jakie relacje inkluzji zachodzą między X^*, X_* i Y^*, Y_*?

7.10 Jakie relacje inkluzji zachodzą między X i $(X^*)_*$, $(X_*)^*$?

7.11 Znaleźć $\sup(x, y)$ i $\inf(x, y)$ (o ile istnieją) dla każdej pary $x, y \in P$ w zbiorach:



7.12 Kiedy istnieje $\sup \emptyset$ (odpowiednio $\inf \emptyset$) w danym zbiorze uporządkowanym ?

7.13 Udowodnić, że jeśli dla każdej pary x, y elementów zbioru uporządkowanego P istnieje $\sup(x, y)$ i $\inf(x, y)$ to istnieje $\sup A$ i $\inf A$ dla dowolnego skończonego zbioru $A \subset P$.

7.14 Niech P będzie skończonym zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$. Niech $A(P)$ będzie rodziną wszystkich antyłańcuchów w zbiorze P. Rozważmy relację $\preceq$ określoną w zbiorze $A(P)$ następująco:

$$X \preceq Y \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ x \leqslant y.$$

Pokazać, że $\preceq$ jest relacją częściowego porządku.