ELiTM 8 Moce zbiorów

8.1 Wykazać równoliczność zbiorów A i B:

a) A - zbiór liczb całkowitych parzystych, B - zbiór liczb całkowitych nieparzystych;

b) $A = \mathbb{N}$ i $B = \mathbb{N} \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, gdzie $a_i \notin \mathbb{N}$;

c) A,B - dowolne dwa odcinki otwarte;

d) A - odcinek otwarty, B - odcinek jednostronnie domknięty;

e) A,B - dowolne dwa okręgi;

f) A,B - dowolne dwa koła;

g) A - prosta, B - odcinek otwarty;

h) A - prosta, B - półprosta domknięta.

8.2 Udowodnić, że jeśli $X \sim Y$ to $\mathcal{P}(X) \sim \mathcal{P}(Y)$.

8.3 Udowodnić, że dla każdego zbioru X, $\mathcal{P}(X) \sim \{0,1\}^X$.

8.4 Udowodnić, że rodzina wszystkich nieskończonych ciągów zero- jedynkowych jest równoliczna rodzinie wszystkich nieskończonych ciągów liczb rzeczywistych.

8.5 Jaka jest moc podanych zbiorów? Odpowiedź uzasadnić.

a) $\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = \sin y\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{y \in \mathbb{N}} x = \ln y\}$;

c) $\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = \operatorname{tg} y\}$;

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x - 4\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} : (\exists n \in \mathbb{N}) x^n \in \mathbb{Q}\}$;

f) rodzina rozłącznych przedziałów liczb rzeczywistych;

g) $\{x \in \mathbb{R} : (\exists n \in \mathbb{N}) \sin^n x \in \mathbb{Q}\}$;

h) rodzina wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych;

i) rodzina wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych stałych od pewnego miejsca;

j) rodzina rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie;

k) $\{(x, y) \in \mathbb{R} : xy < 1\}$;

l) rodzina wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{Q}$;

m) rodzina wszystkich ściśle rosnących ciągów liczb naturalnych;

n) rodzina wszystkich ściśle rosnących ciągów liczb rzeczywistych;

o) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = 2y\}$;

p) $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x = y\}$;

r) $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1\}$;

s) $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x - y = 3\}$.

r) $\{x \in \mathbb{R} : tg \frac{1}{x} \in \mathbb{N}\}$.

8.6 Czy istnieje zbiór X taki, że $\mathcal{P}(X)$ jest mocy $\aleph_0$?