# 1 Ogrzewanie pręta

Niech $y(t,\xi)$ oznacza temperaturę pręta podgrzewanego z intensywnością $u(t)b(\xi)$. Przyjmując, że końce pręta mają stałą temperaturę 0, układ modelowany jest równaniem

$$\begin{aligned} \partial_t y &= \sigma^2 \partial_{xx} y + u(t)b(x) && (1)\\ & y(t,0)=0 \quad y(t,1)=0 \qquad t>0 && (2)\\ & y(0,\xi)=x(\xi) \qquad \xi \in (0,1) && (3) \end{aligned}$$

$\sigma$-pojemność cieplna; $x(\xi)$ początkowy rozkład temperatury;

Przyjmując, że $\hat{x}(\xi)$ jest pożądanym rozkładem temperatury w chwili $T$, znaleźć sposób ogrzewania pręta tak, aby temperatura była najbliższa pożądanej

$$\min \int_0^1 |y(T,\xi) - \hat{x}(\xi)|^2 \; d\xi$$

Rozwiązać następujące ZPN będące dyskretnym skończenie wymiarowym przybliżeniem modelu

$$\min \sum_0^J \left| y_j^K - \hat{x}_j \right|^2$$

przy ograniczeniach

$$(\Delta t)^{-1}(y_j^{k+1} - y_j^k) = 0.5(\Delta x)^{-2}\sigma^2(y_{j+1}^{k+1} + y_{j-1}^{k+1} - 2\,y_j^{k+1}) + 0.5(\Delta x)^{-2}\sigma^2(y_{j+1}^k + y_{j-1}^k - 2\,y_j^k) + u^k\, b_j$$

$$y_0^k = y_J^k = 0 \qquad y_j^0 = x_j$$

$$0 \le u^k \le \bar{u}$$

Przyjąc funkcję $b(\xi) = 1$ i $b(\xi) = \xi(\xi - 1)$ Warunek początkowy $x(\xi) = 1$ i $x(\xi) = 0$. Zbadać wrażliwość rozwiązania na zmiany parametrów $\sigma, \bar{u}$ Rozważyć różne funkcje $\hat{x}(\xi)$

- okresowa $\hat{x}(\xi) = 1 + \sin(2\pi\omega\xi)$; $\quad \omega = \ldots, 2^{-1}, 1, 2, 4\ldots$;
- $\hat{x}(\xi) = \xi(\xi - 1)/4$;
- $\hat{x}_j$ losowo wybrany ciąg.

{cf zagadnienie z biochemii}