

CAŁKA POTRÓJNA

1. Obliczyć całkę po prostopadłościanie.

(a) $\iiint_P \frac{1}{\sqrt{4x+z}} dx dy dz$, gdzie $P = \{ (x, y, z): 0 \leq x \leq 4, 4 \leq y \leq 7, 0 \leq z \leq 2 \}$

(b) $\iiint_P x e^{5y+2z} dx dy dz$, gdzie $P = \{ (x, y, z): 1 \leq x \leq 3, \frac{1}{5} \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2 \}$

(c) $\iiint_P x^2 y z^3 dx dy dz = P = \{ (x, y, z): 1 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2 \}$

(d) $\iiint_P (x + y + z) dx dy dz$, $P : 0 \leq x, y, z \leq 2$

2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami.

(a) $x^2 + y^2 = 4, z = -1, z = 5$

(b) $z = x^2 + y^2 - 2, z = 3$

(c) $2x + y + z = 4, x, y, z = 0$

(d) $z = 4 - \sqrt{x^2 - y^2}, z = -5$

(e) $z = -\sqrt{2x^2 + 2y^2}, z = -\sqrt{6 - x^2 - y^2}$

3. Korzystając ze współrzędnych walcowych obliczyć całkę po obszarze Ω ograniczonym podanymi powierzchniami.

(a) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, gdzie $\Omega: z = 9 - x^2 + y^2 = 0$

(b) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, gdzie $\Omega: x^2 + y^2 - 2z = 0, z = 2$

(c) $\iiint_{\Omega} xy dx dy dz$, gdzie $\Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y \geq 0$

(d) $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, gdzie $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

(e) $\iiint_{\Omega} (1 + x^2 + y^2) dx dy dz$, gdzie $\Omega: x^2 + y^2 = 16, z = 0, z = 4$

4. Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć całkę po obszarze Ω ograniczonym podanymi powierzchniami.

(a) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, gdzie $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$

(b) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dx dy dz$, gdzie $\Omega: z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}, z = 0, y < x$

(c) $\iiint_{\Omega} yz dx dy dz$, gdzie $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq 0, z \geq 0$

(d) $\iiint_{\Omega} y dx dy dz$, gdzie $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 4, y \leq 0, z \geq 0$

Odpowiedzi.

1 (a) $16 \cdot 17$ (b) $\frac{2}{5} e(e^4 - 1)^2$ (c) 210 (d) 24

2 (a) 24π (b) $\frac{25}{2} \pi$ (c) $\frac{16}{3}$ (d) 9π (e) $4(\sqrt{6} - \sqrt{2} - \frac{4}{3})\pi$

3. (a) $\frac{243}{4}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{1}{15} + \frac{1}{80} \sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{48}$ (e) $9 \cdot 2^5 \pi$

4. (a) $\frac{1}{5} 2^6 \pi$ (b) $\frac{1}{2} 3^5 \pi$ (c) $\frac{2}{5} 3^4$ (d) -2π