Imię i nazwisko:.. grupa ....

PRZYKŁADOWY egzamin z Analizy Matematycznej I
Część 2 - zadania

zadanie	1	2	3	4	suma
punkty					

Zadanie 1.(8p) Obliczyć granice

(a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^{2n}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} x^{-6}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Zadanie 2. (7p) Niech ciąg x_n będzie określony wzorem

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}(1 + x_{n-1}^2) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}, \\ \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że ciąg x_n jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

Zadanie 3.(8p) Wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji

$$f(x) = x\sin(\ln x).$$

Zadanie 4.(7p) Obliczyć

$$\int \frac{\cos x \ dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$$

ODPOWIEDZI I WSKAZÓWKI:

1. (a) 0 (można użyć twierdzenia o trzech ciągach)
(b) 0 (użyć twierdzenia de l'Hospitala)

2. Ciąg ten jest zbieżny, bo jest rosnący i ograniczony. Jego granica wynosi 1.

3. f jest wklęsła w każdym przedziale postaci $\left(e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{5}{4}\pi+2k\pi}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
f jest wypukła w każdym przedziale postaci $\left(e^{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}, e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
Punkty przegięcia $\left(e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\right)$, $\left(e^{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

4. $t = \mathrm{tg}x \;\Rightarrow\; \int \frac{dt}{t^3-1} = \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln|t^2+t+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}[\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})] + C$, gdzie $t = \mathrm{tg}x$