Wykład 10: Wzór Taylora i ekstrema lokalne funkcji

Twierdzenie 10.1 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a)**.**
Jeśli f ma ciągłą pochodną rzędu n w przedziale $[x_0, x]$ i jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w przedziale (x_0, x), to istnieje $c \in (x_0, x)$ takie, że

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{wielomian Taylora } T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{reszta Lagrange'a } R_n(x)}.$$

Uwaga 10.1. Twierdzenie 10.1 jest także prawdziwe dla przedziału $[x, x_0]$, dokładniej:
Jeśli f ma ciągłą pochodną rzędu n w przedziale $[x, x_0]$ i jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w przedziale (x, x_0), to istnieje $c \in (x, x_0)$ takie, że

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{wielomian Taylora } T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{reszta Lagrange'a } R_n(x)}.$$

Uwaga 10.2. Wstawiając w twierdzeniu 10.1 $x_0 = 0$, otrzymujemy wzór Maclaurina z resztą Lagrange'a:

$$\exists_{c \in (x_0, x)} \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Twierdzenie 10.2 (wzór Taylora z resztą Peano)**.**
Jeśli f ma pochodną $f^{(n)}$ w punkcie x_0 ($\Rightarrow \exists_{\delta > 0}$ f ma pochodne $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ w $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$), to

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{wielomian Taylora } T_n(x)} + R_n(x),$$

gdzie $R_n(x) = o(|x - x_0|^n)$, tzn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

EKSTREMA LOKALNE

W tej części wykładu będziemy zakładać, że $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrznym D.

Definicja (ekstremów lokalnych)**.** Funkcja f ma w punkcie x_0

- maksimum lokalne $\Leftrightarrow \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x_0) \geq f(x)$;
- maksimum lokalne właściwe $\Leftrightarrow \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_o\}} f(x_0) > f(x)$;
- minimum lokalne $\Leftrightarrow \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x_0) \leq f(x)$;
- minimum lokalne właściwe $\Leftrightarrow \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_o\}} f(x_0) < f(x)$.

Twierdzenie 10.3 (warunek konieczny ekstremum).
Jeśli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 i jest różniczkowalna w punkcie x_0, to $f'(x_0) = 0$.

Twierdzenie 10.4 (pierwszy warunek wystarczający ekstremum).

- Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i istnieje $\delta > 0$ taka, że f jest różniczkowalna w $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, przy czym

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{dla} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) > 0 & \text{dla} \quad x \in (x_0, x_0 + \delta), \end{cases}$$

  to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe.

- Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i istnieje $\delta > 0$ taka, że f jest różniczkowalna w $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, przy czym

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{dla} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) < 0 & \text{dla} \quad x \in (x_0, x_0 + \delta), \end{cases}$$

  to f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 10.5 (drugi warunek wystarczający ekstremum).
Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$, to funkcja f ma ekstremum lokalne właściwe w punkcie x_0. Ponadto

- jeśli $f''(x_0) > 0$, to jest to minimum lokalne właściwe;
- jeśli $f''(x_0) < 0$, to jest to maksimum lokalne właściwe.