Wykład 11: Wklęsłość i wypukłość funkcji

Przez cały wykład P będzie oznaczać dowolny przedział.

Definicja. Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest

- wypukła $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in P} \forall_{\lambda \in [0,1]} \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$;
- wklęsła $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in P} \forall_{\lambda \in [0,1]} \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$;
- ściśle wypukła $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in P, x \neq y} \forall_{\lambda \in (0,1)} \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$;
- ściśle wklęsła $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in P, x \neq y} \forall_{\lambda \in (0,1)} \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Interpretacja geometryczna:
Ścisła wypukłość oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu funkcji leży powyżej fragmentu wykresu położonego pomiędzy punktami, przez które przechodzi sieczna.

Wypukłość oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu funkcji leży powyżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonego pomiędzy punktami, przez które przechodzi sieczna.

Lemat 11.1. Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest

- wypukła $\Leftrightarrow \forall_{x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in P} \; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$;
- wklęsła $\Leftrightarrow \forall_{x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in P} \; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$;
- ściśle wypukła $\Leftrightarrow \forall_{x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in P} \; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$;
- ściśle wklęsła $\Leftrightarrow \forall_{x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in P} \; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Twierdzenie 11.1.

- Jeśli funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest wypukła i jej wykres ma w jakimś punkcie styczną niepionową, to cały wykres funkcji leży powyżej lub na tej stycznej:
$$\forall_{x_0 \in P:\, f'(x_0) \text{ istnieje}} \forall_{x \in P} \; f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$
- Jeśli funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest ściśle wypukła i jej wykres ma w jakimś punkcie styczną niepionową, to cały wykres funkcji, z pominięciem punktu styczności, leży powyżej tej stycznej:
$$\forall_{x_0 \in P:\, f'(x_0) \text{ istnieje}} \forall_{x \in P, x \neq x_0} \; f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Twierdzenie 11.2.

$$\forall_{x \in P} \; f''(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ jest ściśle wypukła w przedziale } P.$$

Twierdzenie 11.3.

$$\forall_{x \in P} \; f''(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ jest ściśle wklęsła w przedziale } P.$$

W twierdzeniach 10.2 i 10.3, implikacji nie można zastąpić równoważnością, mamy natomiast:

Twierdzenie 11.4. Jeśli $f : P \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, to

- f jest wypukła $\iff \forall_{x \in P} \; f''(x) \geq 0$,
- f jest wklęsła $\iff \forall_{x \in P} \; f''(x) \leq 0$.