Wykład 12: Punkty przegięcia. Badanie przebiegu zmienności funkcji

Przez cały wykład będziemy zakładać, że $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrznym zbioru D.

Definicja (punktu przegięcia).
Punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia (wykresu) funkcji f $\Leftrightarrow$ funkcja f ma w tym punkcie styczną i zmienia się w nim ze ściśle wypukłej na ściśle wklęsłą lub na odwrót.

Twierdzenie 11.1 (warunek konieczny punktu przegięcia).
Jeśli $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f i istnieje $f''(x_0)$, to $f''(x_0) = 0$.

Twierdzenie 11.2 (warunek wystarczający punktu przegięcia).
Jeśli funkcja f ma w punkcie $(x_0, f(x_0))$ styczną i istnieje $\delta > 0$ taka, że f jest dwukrotnie różniczkowalna w $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, przy czym

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & \text{dla} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f''(x) > 0 & \text{dla} \quad x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} f''(x) > 0 & \text{dla} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f''(x) < 0 & \text{dla} \quad x \in (x_0, x_0 + \delta), \end{cases}$$

to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f.