Wykład 13: Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Przez cały wykład $P \subset \mathbb{R}$ będzie oznaczać przedział.

Definicja. $F : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f : P \to \mathbb{R} \Leftrightarrow F$ jest różniczkowalna i $\forall_{x \in P} \quad F'(x) = f(x)$.

Twierdzenie 13.1. Jeśli $F_0 : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f : P \to \mathbb{R}$, to $F : P \to \mathbb{R}$ jest też funkcją pierwotną $f \Leftrightarrow$ istnieje stała $C \in \mathbb{R}$ taka, że $\forall_{x \in P} F(x) = F_0(x) + C$.

Twierdzenie 13.2. Każda funkcja ciągła $f : P \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną.

Definicja. Całką nieoznaczoną funkcji $f : P \to \mathbb{R}$, oznaczaną $\int f(x)dx$, nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych f. Zapisujemy $\int f(x)dx = F(x) + C$, gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną f.

WZORY PODSTAWOWE RACHUNKU CAŁKOWEGO:

- $\int 0dx = C$;
- $\int 1dx = x + C$;
- $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ dla $\alpha \neq -1$;
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$;
- $\int e^x dx = e^x + C$;
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
- $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$;
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$;
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$;
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$.

Jeśli $f, g : P \to \mathbb{R}$ mają funkcje pierwotne i $A \in \mathbb{R}$ jest stałą, to

1. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,
2. $\int Af(x)dx = \begin{cases} A\int f(x)dx & \text{gdy } A \neq 0, \\ C & \text{gdy } A = 0. \end{cases}$

Twierdzenie 13.3 (o całkowaniu przez części)**.**
Jeśli $f, g : P \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i $f'g$ ma funkcję pierwotną, to fg' też ma funkcję pierwotną i

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie 13.4 (o całkowaniu przez podstawienie)**.**
Jeśli $g : P_1 \to P_2$ jest różniczkowalna i $f : P_2 \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną , to $(f \circ g) \cdot g'$ też ma funkcję pierwotną i

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, \text{ gdzie } t = g(x).$$

Całkowanie funkcji wymiernych $\int \frac{\textbf{wielomian}_1(x)}{\textbf{wielomian}_2(x)}dx$

1. Jeśli stopień wielomianu w liczniku jest większy lub równy stopniowi wielomianu w mianowniku, to wykonujemy dzielenie.
2. Wielomian w mianowniku rozkładamy na iloczyn.
3. Ułamek właściwy zamieniamy na sumę ułamków prostych.
4. Liczymy całki z ułamków prostych.