Wykład 14: Metody wyznaczania całek. Całka oznaczona.

1). Całkowanie funkcji wymiernych $\int \frac{\textbf{wielomian}_1(x)}{\textbf{wielomian}_2(x)}dx$

Metoda została omówiona na poprzednim wykładzie.

2). Całkowanie wyrażeń trygonometrycznych $\int G(\sin x, \cos x)dx$, gdzie G jest funkcją wymierną dwóch zmiennych

- $G(-\sin x, \cos x) = -G(\sin x, \cos x) \;\Rightarrow t = \cos x$
- $G(\sin x, -\cos x) = -G(\sin x, \cos x) \;\Rightarrow t = \sin x$
- $G(-\sin x, -\cos x) = G(\sin x, \cos x) \;\Rightarrow t = \operatorname{tg} x$
- podstawienie uniwersalne: $t = tg\frac{x}{2} \;\Rightarrow \sin x = \frac{2t}{t^2+1}, \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, dx = \frac{2}{t^2+1}dt$

3). Całki typu $\int G\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ **, gdzie** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ i G jest funkcją wymierną dwóch zmiennych (czasami poniższe podstawienie działa także dla funkcji G innej postaci)

Podstawiamy $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \;\Rightarrow\; x = \ldots \;\Rightarrow dx = \ldots$ i otrzymujemy całę z funkcji wymiernej.

4). Całki zawierające pierwiastek z trójmianu kwadratowego

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+K}} = \begin{vmatrix} \text{podstawienie Eulera} \\ t = x + \sqrt{x^2+K} \end{vmatrix} = \ldots = \ln|x + \sqrt{x^2+K}| + C$
- $\int \sqrt{x^2+K}dx = \int \left(x\frac{x}{\sqrt{x^2+K}} + \frac{K}{\sqrt{x^2+K}}\right)dx = \ldots = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+K} + \frac{K}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+K}| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \begin{vmatrix} t = \frac{x}{a} \\ dt = \ldots \end{vmatrix} = \ldots = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - x\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = \ldots = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$
- Metoda współczynników nieoznaczonych do obliczania całek $\int \frac{w_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$:

$$\int \frac{w_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \underbrace{w_{n-1}(x)}_{\substack{\text{wielomian stopnia } n-1, \\ \text{którego współczynników} \\ \text{nie znamy}}} \cdot\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

CAŁKA OZNACZONA:

Definicja. Jeśli $f : P \to \mathbb{R}$ posiada funkcję pierwotną F oraz $a, b \in P$, to <u>całką oznaczoną od a do b funkcji f</u>, oznaczaną $\int_a^b f(x)dx$, nazywamy liczbę $F(b) - F(a)$. Zapisujemy

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \text{ gdzie } F \text{ jest dowolną funkcją pierwotną } f.$$