Wykład 15: Całka Riemanna

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Aby zdefiniować całkę Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ wprowadzamy następujące pojęcia.

Definicja. $\pi = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ nazywamy podziałem przedziału $[a, b]$ (na k odcinków) jeśli $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$.

Definicja. Średnicą podziału π nazywamy liczbę, oznaczaną $\delta(\pi)$, równą długości największego z odcinków podziału, tzn. $\delta(\pi) = \max_{i=1,\dots,k}(x_i - x_{i-1})$.

Definicja. $\omega = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ nazywamy wartościowaniem podziału π (lub punktami pośrednimi podziału) jeśli $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, \dots, k$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ tworzymy podział $\pi_n = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\right)$. Powstaje w ten sposób ciąg podziałów $\{\pi_n\}$.

Definicja. Ciąg podziałów $\{\pi_n\}$ nazywamy normalnym jeśli $\lim_{n\to\infty} \delta(\pi_n) = 0$.

Dla danego ciągu $\{\pi_n\} = \left\{\left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\right)\right\}$ podziałów przedziału $[a, b]$ tworzymy trzy sumy:

$$1).\ \text{dolną sumę całkową Darboux :}\quad s_n = s_n(\pi_n) = \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)} \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right),$$

$$2).\ \text{górną sumę całkową Darboux :}\quad S_n = S_n(\pi_n) = \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)} \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right),$$

$$3).\ \text{sumę całkową Riemanna :}\quad \sigma_n = \sigma_n(\pi_n, \omega_n) = \sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right) \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right),$$

gdzie

$$m_i^{(n)} = \inf_{x\in[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f(x) \quad \text{i} \quad M_i^{(n)} = \sup_{x\in[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f(x).$$

Definicja. Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ istnieje liczba $\sigma \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego normalnego ciągu podziałów $\{\pi_n\}$ i dla każdego ciągu wartościowań $\{\omega_n\}$ mamy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(\pi_n, \omega_n) = \sigma$. Jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$, to σ nazywamy całką Riemanna funkcji f na $[a, b]$ i oznaczamy $\int_a^b f(x)dx$.

Twierdzenie 15.1. Dla każdego normalnego ciągu podziałów istnieją granice $\lim_{n\to\infty} s_n(\pi_n)$ i $\lim_{n\to\infty} S_n(\pi_n)$ i obie nie zależą od obranego ciągu podziałów. Oznaczamy:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n(\pi_n)\ \text{ - dolna całka Darboux; }\ S = \lim_{n\to\infty} S_n(\pi_n)\ \text{ - górna całka Darboux.}$$

Twierdzenie 15.2. Ograniczona funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna $\Leftrightarrow$ dolna całka Darboux jest równa górnej całce Darboux.

Twierdzenie 15.3. Każda funkcja monotoniczna na $[a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$.

Twierdzenie 15.4. Każda funkcja ciągła na $[a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$.

Twierdzenie 15.5 (Podstawowy wzór rachunku całkowego)**.** Jeśli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, zaś F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f, to

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{całka Riemanna}} = F(b) - F(a) = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{całka oznaczona}}.$$