Zasady zaliczenia
patrz: pages.mini.pw.edu.pl/˜dembinskaa

Literatura
[1] A. Dembińska, B. Karpińska, J. Kotus ,,Analiza matematyczna I dla studentów informatyki", Oficyna Wydawnicza PW.
[2] M. Gewert, Z. Skoczylas ,,Analiza matematyczna I. Definicje, twierdzenia, wzory", GIS.
[3] M. Gewert, Z. Skoczylas ,,Analiza matematyczna I. Przykłady i zadania", GIS.
[4] M. Gewert, Z. Skoczylas ,,Analiza matematyczna I. Kolokwia i egzaminy", GIS.
[5] F. Leja ,,Rachunek różniczkowy i całkowy", PWN.
[6] J. Banaś, S. Wędrychowicz ,, Zbiór zadań z analizy matematycznej", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
[7] W. J. Kaczor, M. T. Nowak ,,Zadania z analizy matematycznej", tomy 1, 2, 3, PWN.

Wykład 1: Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

Będziemy stosować następujące oznaczenia:
$\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ - zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych
$\forall$ - dla każdego
$\exists$ - istnieje
$\Leftrightarrow$ - wtedy i tylko wtedy, gdy
$[x]$ - część całkowita x, czyli największa liczba całkowita nieprzekraczająca x.

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest <u>ograniczony z dołu</u> $\Leftrightarrow$ $\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{a\in A}\ a \geq m$. Liczbę m nazywamy wtedy <u>ograniczeniem dolnym</u> zbioru A.
Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest <u>ograniczony z góry</u> $\Leftrightarrow$ $\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{a\in A}\ a \leq M$. Liczbę M nazywamy wtedy <u>ograniczeniem górnym</u> zbioru A.
Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest <u>ograniczony</u> $\Leftrightarrow$ jest ograniczony z góry i z dołu $\Leftrightarrow$ $\exists_{m,M\in\mathbb{R}}\forall_{a\in A}\ m \leq a \leq M$ $\Leftrightarrow$ $\exists_{K\in\mathbb{R}}\forall_{a\in A}\ |a| \leq K$.

Definicja. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. <u>Kresem dolnym</u> zbioru A (oznaczenie $\inf A$) nazywamy największe ograniczenie dolne zbioru A:

$$\alpha = \inf A \ \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & \forall_{a\in A}\ \ a \geq \alpha \\ (2) & \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a_0\in A}\ \ a_0 < \alpha + \varepsilon. \end{cases}$$

Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. <u>Kresem górnym</u> zbioru A (oznaczenie $\sup A$) nazywamy najmniejsze ograniczenie górne zbioru A:

$$\beta = \sup A \ \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & \forall_{a\in A}\ \ a \leq \beta \\ (2) & \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a_0\in A}\ \ a_0 > \beta - \varepsilon. \end{cases}$$

Jeśli A nie jest ograniczony z dołu, to przyjmujemy $\inf A = -\infty$.
Jeśli A nie jest ograniczony z góry, to przyjmujemy $\sup A = +\infty$.
Jeśli $A = \emptyset$, to $\inf A = +\infty$ i $\sup A = -\infty$.

Aksjomat ciągłości. Każdy zbiór $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, ograniczony z dołu ma skończony kres dolny. Każdy zbiór $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, ograniczony z góry ma skończony kres górny.

Twierdzenie (Zasada indukcji matematycznej)**.** Jeśli $A \subset \mathbb{N}$ spełnia warunki:
(1) $1 \in A$
(2) $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$,
to $A = \mathbb{N}$.

Twierdzenie. Zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, tzn. w każdym przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$, gdzie $a < b$, istnieje liczba wymierna. Także zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, tzn. w każdym przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$, gdzie $a < b$, istnieje liczba niewymierna.