Wykład 2 i 3: Ciągi liczbowe

Definicja. Ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (lub $\{a_n\}_{n\geq 1}$ lub $\{a_n\}$) to funkcja $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Wtedy a_n to tak zwany n-ty wyraz ciągu.

Definicja. Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest

- ograniczony z dołu $\Leftrightarrow$ $\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \geq m$;
- ograniczony z góry $\Leftrightarrow$ $\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \leq M$;
- ograniczony $\Leftrightarrow$jest ograniczony z góry i z dołu.

Definicja. Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy

- ciągiem rosnącym (ściśle rosnącym) $\Leftrightarrow$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} > a_n$;
- ciągiem niemalejącym $\Leftrightarrow$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} \geq a_n$;
- ciągiem malejącym (ściśle malejącym) $\Leftrightarrow$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} < a_n$;
- ciągiem nierosnącym $\Leftrightarrow$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} \leq a_n$.

Definicja. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Liczbę g nazywamy wówczas granicą ciągu o wyrazach a_n i piszemy $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ albo $a_n \to g$. Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy rozbieżnym.

Twierdzenie 2.1. Każdy ciąg stały jest zbieżny: $(\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n = a)\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Twierdzenie 2.2. Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Twierdzenie 2.3. Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.

Twierdzenie 2.4 (o ciągłości działań arytmetycznych)**.** Jeśli $a_n \to a$ i $b_n \to b$, to
(1) $a_n + b_n \to a + b$;
(2) $a_n - b_n \to a - b$;
(3) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$;
(4) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ jeśli tylko $b \neq 0$ i $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n \neq 0$.

Twierdzenie 2.5 (o ciągłości wartości bezwzględnej)**.** Jeśli $a_n \to a$, to $|a_n| \to |a|$.

Uwaga 2.1. $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$.

Twierdzenie 2.6 (o przechodzeniu do granicy w nierównościach)**.**
Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ a_n \leq b_n$ i $a_n \to a$ i $b_n \to b$, to $a \leq b$.

Uwaga 2. 2. Powyższe twierdzenie nie będzie prawdziwe, jeśli znak $\leq$ zastąpimy przez $<$, tzn. możemy mieć: $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ a_n < b_n$ i $a_n \to a$ i $b_n \to b$ i $a \not< b$.

Twierdzenie 2.7 (o trzech ciągach)**.**
Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ a_n \leq b_n \leq c_n$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Wniosek. Jeżeli $a_n \to 0$ zaś ciąg $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony, to $a_n \cdot b_n \to 0$.

Twierdzenie 2.8. Jeśli ciąg jest niemalejący i ograniczony z góry, to jest zbieżny.
Jeśli ciąg jest nierosnący i ograniczony z dołu, to jest zbieżny.

Definicja. Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżny do $+\infty$ (zapis $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ lub $a_n \to \infty$) $\Leftrightarrow$

$$\forall_{D>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ \ a_n > D.$$

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżny do $-\infty$ (zapis $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$) $\Leftrightarrow$

$$\forall_{D>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ \ a_n < -D.$$

Twierdzenie 2.9 (o dwóch ciągach)**.**
Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ a_n \leq b_n$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.
Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ a_n \leq b_n$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Twierdzenie 2.10. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ i ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z dołu, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.
Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z góry, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.

Twierdzenie 2.11. (1) $|a| < 1 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} a^n = 0$;
(2) $a > 0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$;
(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Twierdzenie 2.12 (zbieżność ciągu Eulera)**.**
Ciąg Eulera $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry ($\Rightarrow$ jest zbieżny).

Definicja. Liczba e to granica ciągu Eulera, tzn. $\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828$.

Definicja. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczbowym a $n_1, n_2, \ldots$ liczbami naturalnymi takimi, że $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$. Wtedy ciąg $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ o wyrazach $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ nazywamy podciągiem ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Twierdzenie 2.13. Każdy podciąg ciągu zbieżnego do g jest zbieżny do tej samej granicy g:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = g \text{ i } \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ jest podciągiem ciągu } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g.$$

Wniosek. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ zawiera (co najmniej) dwa podciągi zbieżne do różnych granic, to nie ma granicy.

Twierdzenie 2.14 (Bolzano-Weierstassa)**.** Każdy ciąg liczbowy ograniczony ma podciąg zbieżny.

Definicja. Ciąg $\{a_n\}$ nazywa się ciągiem Cauchy'ego (ciągiem podstawowym) $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geq n_0}\ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 2.15 (warunek równoważny zbieżności ciągu liczbowego)**.**
Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Definicja. Mówimy, że $g \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ $\Leftrightarrow$ istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ tego ciągu taki, że $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g$.

Definicja. Granica dolna ciągu $\{a_n\}$ (oznaczenie $\liminf_{n\to\infty} a_n$) to kres dolny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}}\ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g\}.$$

Granica górna ciągu $\{a_n\}$ (oznaczenie $\limsup_{n\to\infty} a_n$) to kres górny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}}\ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g\}.$$

Twierdzenie 2.16. Dla dowolnego $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \ \Leftrightarrow\ \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = g.$$