Wykład 4: Granica funkcji

Przez cały wykład będziemy zakładać, że funkcja $f : D \mapsto \mathbb{R}$ i $D \subset \mathbb{R}$.
Będziemy też używać oznaczenia $\tilde{R} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definicja. Mówimy, że $a \in \tilde{R}$ jest punktem skupienia zbioru $D \Leftrightarrow$ istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in D \setminus \{a\}$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Definicja (Heinego granicy funkcji)**.**
Niech a będzie punktem skupienia zbioru D i niech $g \in \tilde{R}$. Mówimy, że g jest granicą funkcji f w punkcie a (lub granicą funkcji f w $\pm\infty$, gdy $a = \pm\infty$), co zapisujemy: $\lim_{x\to a} f(x) = g$ lub $f(x) \overset{x\to a}{\to} g$, $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Twierdzenie 4.1. Jeśli granica funkcji istnieje, to jest wyznaczona jednoznacznie.

Definicja (Cauchy'ego skończonej granicy funkcji w punkcie)**.**
Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D i niech $g \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\lim_{x\to a} f(x) = g \ \Leftrightarrow\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 4.2. Definicje Heinego i Cauchy'ego skończonej granicy funkcji w punkcie są równoważne.

Definicja (Cauchy'ego niewłaściwej granicy funkcji w punkcie)**.**
Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D. Wtedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{G>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > G,\\
\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{G>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -G.
\end{aligned}$$

Definicja (Cauchy'ego skończonej granicy funkcji w $\pm\infty$)**.**
Niech $g \in \mathbb{R}$ i $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$) będzie punktem skupienia zbioru D. Wtedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) = g \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{G>0}\ \forall_{x\in D}\ x > G \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon,\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = g \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{G>0}\ \forall_{x\in D}\ x < -G \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Definicja (Cauchy'ego niewłaściwej granicy funkcji w $\pm\infty$)**.**
Niech $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$) będzie punktem skupienia zbioru D. Wtedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{L>0}\ \exists_{G>0}\ \forall_{x\in D}\ x > G \Rightarrow f(x) > L,\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{L>0}\ \exists_{G>0}\ \forall_{x\in D}\ x < -G \Rightarrow f(x) > L,\\
\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{L>0}\ \exists_{G>0}\ \forall_{x\in D}\ x > G \Rightarrow f(x) < -L,\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{L>0}\ \exists_{G>0}\ \forall_{x\in D}\ x < -G \Rightarrow f(x) < -L.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 4.3. Powyższe trzy definicje Cauchy'ego są równoważne definicji Heinego.

Twierdzenie 4.4 (o trzech funkcjach)**.**
Jeśli $f, p, h : D \to \mathbb{R}$, a jest punktem skupienia zbioru D, $g \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = g$ oraz

$$f(x) \le p(x) \le h(x) \text{ dla wszystkich } x \in D \setminus \{a\} \text{ dostatecznie bliskich } a,$$

to $\lim_{x\to a} p(x) = g$.

Twierdzenie 4.5 (o dwóch funkcjach)**.**

- Jeśli $f, h : D \to \mathbb{R}$, a jest punktem skupienia zbioru D i $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ oraz

  $$f(x) \le h(x) \text{ dla wszystkich } x \in D \setminus \{a\} \text{ dostatecznie bliskich } a,$$

  to $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$.

- Jeśli $f, h : D \to \mathbb{R}$, a jest punktem skupienia zbioru D i $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$ oraz

  $$f(x) \le h(x) \text{ dla wszystkich } x \in D \setminus \{a\} \text{ dostatecznie bliskich } a,$$

  to $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Twierdzenie 4.6.

$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ |\sin x| \le |x|$,

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.