Wykład 5: Granice jednostronne oraz asymptoty i ciągłość funkcji

Przez cały wykład będziemy zakładać, że $f : D \mapsto \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$. Będziemy też używać oznaczenia $\tilde{R} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definicja (Heinego granic jednostronnych funkcji)**.**

- Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (a, \infty)$ i niech $g \in \tilde{R}$. Mówimy, że g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie a (zapis: $\lim_{x\to a^+} f(x) = g$ lub $f(x) \overset{x\to a^+}{\to} g$ lub $f(a^+) = g$) $\Leftrightarrow$
$$\forall_{\{x_n\}\subset D\cap(a,\infty)} \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$
- Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, a)$ i niech $g \in \tilde{R}$. Mówimy, że g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie a (zapis: $\lim_{x\to a^-} f(x) = g$ lub $f(x) \overset{x\to a^-}{\to} g$ lub $f(a^-) = g$) $\Leftrightarrow$
$$\forall_{\{x_n\}\subset D\cap(-\infty,a)} \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Twierdzenie 5.1 (definicja Cauchy'ego granic jednostronnych funkcji)**.**

- Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (a, \infty)$.
$$\text{Gdy } g \in \mathbb{R}, \text{ to } \lim_{x\to a^+} f(x) = g \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in D}\ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$
$$\text{Gdy } g = +\infty, \text{ to } \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall_{G>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in D}\ 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > G.$$
$$\text{Gdy } g = -\infty, \text{ to } \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall_{G>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in D}\ 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < -G.$$
- Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, a)$.
$$\text{Gdy } g \in \mathbb{R}, \text{ to } \lim_{x\to a^-} f(x) = g \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in D}\ -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$
$$\text{Gdy } g = +\infty, \text{ to } \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall_{G>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in D}\ -\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > G.$$
$$\text{Gdy } g = -\infty, \text{ to } \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall_{G>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in D}\ -\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < -G.$$

Twierdzenie 5.2. Odpowiedniki twierdzeń o dwóch i trzech funkcjach są także prawdziwe dla granic jednostronnych.

Twierdzenie 5.3. Jeśli $g \in \tilde{R}$ i a jest punktem skupienia zbiorów $D \cap (a, \infty)$ i $D \cap (-\infty, a)$, to
$$\lim_{x\to a} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = g.$$

Definicja. Prosta o równaniu $x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, nazywa się

- asymptotą pionową lewostronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$;
- asymptotą pionową prawostronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$;
- asymptotą pionową obustronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow$ jest jej asymptotą pionową lewostronną i prawostronną.

Definicja. Prosta o równaniu $y = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$, nazywa się

- asymptotą poziomą lewostronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}(f(x)-b) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$;
- asymptotą poziomą prawostronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x)-b) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = b$;
- asymptotą poziomą obustronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow$ jest jej asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną.

Definicja. Prosta o równaniu $y = mx + k$, gdzie $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $k \in \mathbb{R}$, nazywa się

- asymptotą ukośną lewostronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx + k)] = 0$;
- asymptotą ukośną prawostronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx + k)] = 0$;
- asymptotą ukośną obustronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow$ jest jej asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną.

Twierdzenie 5.4. Prosta o równaniu $y = mx + k$, gdzie $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $k \in \mathbb{R}$, jest asymptotą ukośną lewostronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $k = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx]$.
Prosta o równaniu $y = mx + k$, gdzie $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $k \in \mathbb{R}$, jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji $y = f(x) \Leftrightarrow m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $k = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$.

Definicja (Heinego ciągłości funkcji)**.**
Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D \Leftrightarrow \forall_{\{x_n\}\subset D} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Twierdzenie 5.5 (definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji)**.**
Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in D}\, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Twierdzenie 5.6. Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D$ będącym punktem skupienia zbioru $D \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Definicja. Mówimy, że f jest ciągła $\Leftrightarrow$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny $\Leftrightarrow$

$$\forall_{a\in D}\, \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in D}\, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$