Wykład 6: Funkcje ciągłe

Twierdzenie 6.1. Jeśli $f, g : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$, są ciągłe w punkcie $a \in D$, to

- $f + g, f - g$ i fg są funkcjami ciągłymi w punkcie a;
- $\frac{f}{g}$ jest funkcją ciągłą w punkcie a jeśli tylko $\forall_{x \in D}\ g(x) \neq 0$.

Twierdzenie 6.2 (o ciągłości złożenia)**.**
Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, dokładniej jeśli $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ i $f : D_1 \to D_2,\ g : D_2 \to \mathbb{R}$ oraz f jest ciągła w punkcie $a \in D_1$ i g jest ciągła w punkcie $f(a) \in D_2$, to $g \circ f$ jest ciągła w punkcie a.

Twierdzenie 6.3 (o ciągłości funkcji odwrotnej)**.**
Jeśli P to przedział i $f : P \to Y \subset \mathbb{R}$ jest ciągła i odwracalna, to funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \to P$ też jest ciągła.

Do <u>funkcji elementarnych</u> będziemy zaliczać:

1. wielomiany: $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,
2. funkcje wymierne, tzn. ilorazy wielomianów,
3. funkcję pierwiastek: $\sqrt[n]{x}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$,
4. funkcje trygonometryczne i cyklometryczne,
5. funkcję wykładniczą: a^x, gdzie $a \in (0, \infty)$,
6. funkcję logarytmiczną: $\log_a x$, gdzie $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$.

Definicja. Niech $x \in \mathbb{R}$.

- Jeśli $a \in [1, \infty)$, to $a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} \wedge q \leq x\}$.
- Jeśli $a \in (0, 1)$, to $a^x := \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

Twierdzenie 6.4 (własności potęgowania)**.**

1. Jeśli $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$, to $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{xy} = (a^x)^y$ i $(ab)^x = a^x b^x$.
2. Jeśli $a \in (1, \infty)$, to funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ jest rosnąca i jej zbiór wartości to $(0, \infty)$.
3. Jeśli $a \in (0, 1)$, to funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ jest malejąca i jej zbiór wartości to $(0, \infty)$.

Definicja. Niech $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$. <u>Funkcja logarytmiczna</u> $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, to funkcja odwrotna do funkcji wykładniczej $g : \mathbb{R} \mapsto (0, \infty)$, $g(x) = a^x$.

Twierdzenie 6.6 (własności logarytmu)**.** Jeśli $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$, $x > 0$, $y > 0$ i $p \in \mathbb{R}$, to

1. $\log_a 1 = 0$ i $\log_a a = 1$,
2. $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$,
3. $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$,
4. $\log_a x^p = p \log_a x$,
5. $x^p = e^{p \ln x}$, gdzie $\ln x := \log_e x$,
6. $\log_a x = \frac{\log_d x}{\log_d a}$ dla dowolnego $d \in (0,1) \cup (1, \infty)$.

Twierdzenie 6.8. Każda funkcja elementarna jest funkcją ciągłą.

Definicja. Funkcjami hiperbolicznymi nazywamy następujące funkcje:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{tgh} x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{ctgh} x := \frac{\cosh x}{\sinh x} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Uwaga. Funkcja potęgowa $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, gdzie $p \in \mathbb{R}$, jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 6.9. Jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich i $a_n \to a \in (0, \infty)$ i $b_n \to b \in \mathbb{R}$, to $a_n^{b_n} \to a^b$.