Wykład 7: Własności funkcji ciągłych. Jednostajna ciągłość funkcji

WŁASNOŚCI FUNKCJI CIĄGŁYCH

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ ma własność Darboux $\Leftrightarrow$

$$f(a) \neq f(b) \;\Rightarrow\; \forall_{c \text{ leżącego pomiędzy } f(a) \text{ i } f(b)} \exists_{x_0 \in (a,b)} f(x_0) = c.$$

Twierdzenie 7.1. Każda funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ma własność Darboux.

Twierdzenie 7.2 (Weierstrassa I)**.**
Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ograniczona, tzn. $\exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq K$.

Twierdzenie 7.3 (Weierstrassa II)**.**
Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to przyjmuje wartość najmniejszą i największą (osiąga swoje kresy), tzn.

$$\exists_{x_m, x_M \in [a,b]} f(x_m) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ i } f(x_M) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

JEDNOSTAJNA CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Poniżej zakładamy, że $D \subset \mathbb{R}$.

Definicja. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x,y \in D} |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Uwaga 7.1. Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, to jest ciągła.

Twierdzenie 7.4 (Cantora)**.**
Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest jednostajnie ciągła.

Definicja. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na D $\Leftrightarrow$

$$\exists_{L > 0} \forall_{x,y \in D} |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Twierdzenie 7.5. Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na D, to jest jednostajnie ciągła.