Wykład 8: Pochodna funkcji jednej zmiennej

Definicja. Punkt x_0 nazywamy punktem wewnętrznym zbioru $D \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\exists_{\delta>0}\ (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset D.$$

Przez cały wykład będziemy zakładać (chyba, że będzie powiedziane inaczej), że $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i x_0 to punkt wewnętrzny zbioru D.

Definicja. Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

to nazywamy ją pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$. Funkcję f nazywamy wtedy różniczkowalną w punkcie x_0.

Prosta styczna.
Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to istnieje prosta styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Równanie tej prostej stycznej to

$$y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0), \quad \text{gdzie } y_0 = f(x_0).$$

Twierdzenie 8.1 (warunek konieczny różniczkowalności)**.**
Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest ciągła w punkcie x_0.

Uwaga 8.1. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 8.1 jest fałszywe, tzn. funkcja ciągła w punkcie x_0 nie musi być różniczkowalna w x_0.

Definicja. Funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze $D \Leftrightarrow \forall_{x\in D}$ f jest różniczkowalną w punkcie x. Wtedy możemy mówić o funkcji $f' : D \to \mathbb{R}$, która $x \mapsto f'(x)$.

Twierdzenie 8.2 (o działaniach arytmetycznych na pochodnych)**.**
Jeśli $f, g : D \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie x_0, to

1. $f+g$ też jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
2. $f-g$ też jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;
3. $f \cdot g$ też jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
4. $\frac{f}{g}$ też jest różniczkowalna w x_0 i $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ jeśli tylko $\forall_{x\in D}\ g(x) \neq 0$.

Twierdzenie 8.3 (o różniczkowaniu złożenia)**.**
Jeśli $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ i $f : D_1 \to D_2$ i $g : D_2 \to \mathbb{R}$ oraz f jest różniczkowalna w x_0 - punkcie wewnętrznym D_1 i g jest różniczkowalna w $f(x_0)$ - punkcie wewnętrznym D_2, to $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Twierdzenie 8.4 (o różniczkowaniu funkcji odwrotnej)**.**
Jeśli f jest ciągła i ściśle monotoniczna w pewnym otoczeniu punktu x_0 (tzn. w pewnym zbiorze $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, gdzie $\delta > 0$) i ma w punkcie x_0 pochodną $f'(x_0) \neq 0$, to f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Twierdzenie 8.5 (o pochodnych funkcji elementarnych).

1. $(const)' = 0$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ (przyjmujemy tutaj $0^0 = 1$);
3. $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$;
4.
   - $(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$;
   - $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$;
   - $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
   - $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$
   ogólniej: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
6. $(e^x)' = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$;
7. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ dla $x \in (0, \infty)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$;
8.
   - $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$;
   - $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$;
   - $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$;
   - $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Z twierdzeń 8.2.3 i 8.5.1 wynika, że jeśli $c \in \mathbb{R}$ i $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0, to cf też jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.

POCHODNE JEDNOSTRONNE

W poniższej definicji *nie* zakładamy, że x_0 jest punktem wewnętrznym zbioru D.

Definicja (pochodnej lewostronnej i prawostronnej).

- Jeśli $\exists_{\delta>0}\ (x_0 - \delta, x_0] \subset D$ oraz istnieje skończona granica
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
to nazywamy ją pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'_-(x_0)$.
- Jeśli $\exists_{\delta>0}\ [x_0, x_0 + \delta) \subset D$ oraz istnieje skończona granica
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
to nazywamy ją pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'_+(x_0)$.

Twierdzenie 8.6 (warunek konieczny i dostateczny różniczkowalności).
Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \Leftrightarrow \big($ istnieją $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ i $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)\big)$.
W przypadku różniczkowalności mamy $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

POCHODNE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Definicja. Pochodną n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy rekurencyjnie:
$$\begin{cases} f^{(0)}(x_0) &= f(x_0) \\ f^{(n)}(x_0) &= (f^{(n-1)})'(x_0) \quad \text{dla } n \geq 1. \end{cases}$$

Funkcję, która ma pochodną n-tego rzędu na przedziale, nazywamy n-krotnie różniczkowalną na tym przedziale.