Wykład 9: Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a oraz reguła de l'Hospitala

Twierdzenie 9.1 (Rolle'a)**.**
Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$.

Twierdzenie 9.2 (Lagrange'a o wartości średniej)**.**
Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b), to

$$\exists_{c\in(a,b)}\ \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

WNIOSKI Z TWIERDZENIA LAGRANGE'A:

Wniosek 9.1.

$$\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x) = 0 \quad \iff \quad f \text{ jest stała w przedziale } (a, b).$$

Wniosek 9.2.

$$\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x) > 0 \quad \implies \quad f \text{ jest rosnąca w przedziale } (a, b).$$

Wniosek 9.3.

$$\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x) < 0 \quad \implies \quad f \text{ jest malejąca w przedziale } (a, b).$$

We wnioskach 9.2 i 9.3, implikacji nie można zastąpić równoważnością, mamy natomiast:

Twierdzenie 9.3.

$$f \text{ jest niemalejąca i różniczkowalna w przedziale } (a, b) \quad \iff \quad \forall_{x\in(a,b)}\ f'(x) \geq 0.$$

Twierdzenie 9.4.

$$f \text{ jest nierosnąca i różniczkowalna w przedziale } (a, b) \quad \iff \quad \forall_{x\in(a,b)}\ f'(x) \leq 0.$$

Uwaga 9.1. Wnioski 9.1, 9.2 i 9.3 oraz twierdzenia 9.3 i 9.4 pozostają prawdziwe jeśli przedział (a, b) zastąpimy przedziałem nieograniczonym (a, ∞), $(-\infty, b)$ lub $(-\infty, \infty)$.

Twierdzenie 9.5 (de l'Hospitala)**.**
Jeśli

- $x_0 \in (a, b)$,
- funkcje $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $(a, b) \setminus \{x_0\}$,
- $\forall_{x\in(a,b)\setminus\{x_0\}}\ g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$,
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,
- istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (skończona lub nieskończona),

to istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Uwaga 9.2. Twierdzenie de l'Hospitala jest prawdziwe także dla granic jednostronnych, a także dla granic w ∞ oraz w $-\infty$, z tym, że na przykład w przypadku granicy w ∞ trzeba założyć, że funkcje $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w (a, ∞) oraz, że $\forall_{x\in(a,\infty)}\ g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$.