Zadania domowe z Analizy Matematycznej II - część 1 (całka Riemanna, całki niewłaściwe, zastosowania geometryczne całek, szeregi liczbowe)

Zadanie 1. *Obliczyć następujące granice:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{5^3}+\sqrt[n]{5^6}+\sqrt[n]{5^9}+\cdots+\sqrt[n]{5^{3n}}\right)$, **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}\right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+3)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+(2n-1))^2}\right)$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5n+4}+\frac{1}{5n+8}+\frac{1}{5n+12}+\cdots+\frac{1}{5n+4n}\right)$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{2i-1}{2n}$, **(f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\frac{2i}{n})\right]^{\frac{1}{n}}$.

Zadanie 2. *Udowodnić, że jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[-1,1]$, to*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{2\pi} f(\sin x)dx.$$

Zadanie 3. *Nie wykonując żadnych rachunków wyznaczyć wartości całek:*

(a) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}dx$, **(b)** $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^3-2x)e^{|x|}dx$.

Zadanie 4. *Obliczyć podane całki niewłaściwe lub wykazać, że są rozbieżne:*

(a) $\int_5^{\infty}\frac{dx}{(5+x)\sqrt{x}}$, **(b)** $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{(x+2)^3}$, **(c)** $\int_0^1\frac{1-\ln x}{x^2}dx$,

(d) $\int_{-\infty}^0 e^{3x}x^2dx$, **(e)** $\int_0^{\infty}e^{-3x}\sin 2x dx$, **(f)** $\int_6^{\infty}\frac{dx}{x^4-3x^2-4}$,

(g) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$, **(h)** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^4}$, **(i)** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$,

(j) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3+x^2+x}$, **(k)** $\int_{-1}^1\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Zadanie 5. *Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:*

(a) $\int_0^{2\pi}\frac{2+\sin x-3\cos x}{\sqrt{x}}dx$, **(b)** $\int_{-\infty}^0\frac{(x-1)^4}{e^{-x^2}+1}dx$.

Zadanie 6. *Obliczyć pola obszarów ograniczonych liniami:*

(a) $y=4x-x^2$ *i* $x+y=0$, **(b)** $y=6\sqrt{x}$ *i* $y=x+8$,

(c) $y=\frac{8}{x^2(x^2+16)}$, $x=1,\ x=3,\ y=0$, **(d)** $y=\arcsin x,\ x=-1,\ x=1,\ y=0$,

(e) $y=\frac{x^2}{2}$ *i* $y=\frac{1}{1+x^2}$.

Zadanie 7. *Udowodnić, że pole powierzchni elipsy o równaniu* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *dane jest wzorem* $P=\pi ab$.

Zadanie 8. *Obliczyć pole obszaru leżącego wewnątrz kardioidy* $r=1-\cos\theta$ *i na zewnątrz okręgu* $r=1$.

Zadanie 9. *Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi o równaniach*

(a) $r=\sin^2\theta$, **(b)** $(x^2+y^2)^2=x^2+4y^2$.

Zadanie 10. *Obliczyć długości łuków krzywych danych poniższymi funkcjami:*

(a) $y=\sqrt{1-x^2}$ *dla* $0\le x\le 0,5$, **(b)** $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$ *dla* $x\in[1/9,4/9]$,

(c) $y=\ln(1-x^2)$ *dla* $0\le x\le 0,5$.

Zadanie 11. *Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi* OX

(a) *krzywej* $y=\mathrm{tg}x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}$, **(b)** *półokręgu o równaniu* $x^2+y^2=2y,\ 0\le y\le 1$.

Zadanie 12. *Czy podane szeregi są zbieżne? Jeśli tak, wyznaczyć ich sumę.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)}$,

ODPOWIEDZI:

1. (a) $\int_0^1 5^{3x}dx=\frac{124}{3\ln 5}$ (b) $\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}$ (c) $\frac{1}{2}\int_0^2\frac{dx}{(1+x)^2}=\frac{1}{3}$ (d) $\int_0^1\frac{dx}{5+4x}=\frac{1}{4}\ln\frac{9}{5}$
(e) $\int_0^1\mathrm{arctg}x\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$ (f) $\int_0^1\ln(1+2x)dx=\frac{3\ln 3}{2}-1$ i granica $=\exp\left(\frac{3\ln 3}{2}-1\right)=\frac{3\sqrt{3}}{e}$

2. $\int_{-\pi}^{\pi}f(\sin x)dx=\int_{-\pi}^{0}f(\sin x)dx+\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$
$\int_{-\pi}^{0}f(\sin x)dx=\int_{-\pi}^{0}f(\sin(x+2\pi))dx=\{t=x+2\pi\}=\int_{\pi}^{2\pi}f(\sin t)dt=\int_{\pi}^{2\pi}f(\sin x)dx$
Stąd $\int_{-\pi}^{\pi}f(\sin x)dx=\int_{\pi}^{2\pi}f(\sin x)dx+\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\int_0^{2\pi}f(\sin x)dx$

3. WSKAZÓWKA: Wystarczy zauważyć, że funkcje podcałkowe są nieparzyste.

4. (a) $\frac{\pi\sqrt{5}}{10}$ (zastosować podstawienie $t=\sqrt{x}$) (b) $\frac{1}{4}$
(c) całka rozbieżna ($\lim_{\alpha\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_{\alpha}^{1}=\infty$)
(d) $\lim_{T\to-\infty}\left[(\frac{1}{3}T^2-\frac{2}{9}T+\frac{2}{27})e^{3T}\right]_T^0=\frac{2}{27}$
(e) $\lim_{T\to\infty}\left[\frac{-e^{-3T}(2\cos 2T+3\sin 2T)}{13}\right]_0^T=\frac{2}{13}$
(f) $\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{20}\ln|\frac{T-2}{T+2}|-\frac{1}{5}\mathrm{arctg}T\right]_6^T=-\frac{\pi}{10}+\frac{1}{20}\ln 2+\frac{1}{5}\mathrm{arctg}6$
(g) $\lim_{S\to 0^+}[\arcsin(x-1)]_S^1+\lim_{T\to 2^-}[\arcsin(x-1)]_1^T=\pi$
(h) 0 (zastosować podstawienie: $t=x^2$)
(i) całka rozbieżna
(j) $\lim_{T\to\infty}\left[\ln\frac{T}{\sqrt{T^2+T+1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2T+1}{\sqrt{3}}\right]_1^T=\ln\sqrt{3}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$
(k) całka rozbieżna, ponieważ $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{-1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}+\int_{-1/2}^{0}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}+\int_0^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}+\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$
i np. całka $\int_0^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ jest rozbieżna, co wynika z kryterium porównawczego:
$\forall_{x\in(0,\frac{1}{2}]}\ \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\ge\frac{1}{x}>0$ oraz $\int_0^{1/2}\frac{dx}{x}=\infty$

5. (a) zbieżna bezwzględnie (b) rozbieżna

6. (a) $\frac{125}{6}$ (b) 8 (c) $\frac{1}{3}-\frac{1}{8}(\mathrm{arctg}\frac{3}{4}-\mathrm{arctg}\frac{1}{4})$ (d) $\pi-2$ (e) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$

8. pole$=\frac{\pi}{4}+2$ **9.** (a) pole$=\frac{3\pi}{8}$ (b) pole$=\frac{5\pi}{2}$.

10. (a) $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{6}$ (b) $\int_{1/9}^{4/9}\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}}\right)^2}dx=\int_{1/9}^{4/9}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{3}$ (c) $\int_0^{1/2}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=\ln 3-\frac{1}{2}$

11. (a) $\pi(1-\frac{\pi}{4})$ (b) $\frac{10\pi}{3}-\pi^2$ **12.** (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\ln 2$