Zadania domowe z Analizy Matematycznej II - część 2 (szeregi liczbowe, ciągi i szeregi funkcyjne, sumowanie szeregów i rozwijanie funkcji w szereg, przestrzenie metryczne, zasada Banacha)

Zadanie 1. *Zbadać zbieżność szeregów:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(\sqrt{2}n)^{3n}}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}-2^{n-1}}$, **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{3n^3}$,

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{n}$, **(e)** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n$, **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3-n}\right)$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5}$, **(h)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$, **(i)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$, **(k)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 5^n}{2^n+3}$, **(l)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+2}}{n^3+1}$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^{10}\left[4+(-1)^n\right]^n}$, **(n)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, **(o)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Zadanie 2. **(a)** *Załóżmy, że* $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, a_n \geq 0$ *i* $b_n > 0$ *oraz że* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. *Czy wówczas*

- *ze zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
- *ze zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Odpowiedź uzasadnić.

(b) *Wykazać, że jeśli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ *są zbieżne, to zbieżny jest również szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$. *Wykorzystując ten fakt pokazać, że ze zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

Zadanie 3. *Dla jakich rzeczywistych* α *podane szeregi są zbieżne?*

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}\ln n}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha}\sin\frac{1}{n^5}$.

Zadanie 4. *Zbadać czy następujące szeregi są zbieżne warunkowo:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)^{2n}}{(n^3+1)^n}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}\cos(n\pi)$, **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[2+(-2)^n\right]^n}{4^n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$, **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)n/2}\cdot\frac{3-(-1)^n}{2n}$, **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[3-(-1)^n\right]\cos(n-1)\pi}{2n}$.

Zadanie 5. *Zbadać punktową i jednostajną zbieżność następujących ciągów funkcyjnych*

(a) $f_n(x) = nxe^{-n^2x}$, $x\in[0,\infty)$, **(b)** $f_n(x) = \sqrt{x+n+1}-\sqrt{x+n}$, $x\geq 0$,

(c) $f_n(x) = x+\frac{\sin(nx)}{n}$, $x\in\mathbb{R}$, **(d)** $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $x\in[0,1]$,

(e) $f_(x) = nx(1-x)^n$, $x\in[a,1]$, *gdzie* $a\in(0,1)$, **(f)** $f_n(x) = \sqrt[n]{2^n+3^n x}$, $x\in[0,\infty)$,

(g) $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $x\in\mathbb{R}$.

Zadanie 6. *Udowodnić zbieżność jednostajną na* $\mathbb{R}$ *następujących szeregów funkcyjnych*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

Zadanie 7. *Pokazać, że szereg funkcyjny* $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}\sqrt{1+nx})^{-1}$ *jest zbieżny jednostajnie na przedziale* $[0,\infty)$.

Zadanie 8. *Wyznaczyć zbiory punktów zbieżności następujących szeregów*

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{2n+5}}x^n$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)3^{n-1}x^{n-1}$, **(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(2n+1)8^n}x^{3n+2}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-n}{3^n}(x-1)^n$, **(f)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^{n+1}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[2+(-1)^n\right]^n x^n$, **(h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}$,

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$.

Zadanie 9. *Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^{2n}}{n^n}$.

⋆ *Czy szeregi te są zbieżne na końcach swoich przedziałów zbieżności?*

Zadanie 10. *Wyznaczyć sumy i zbiory punktów zbieżności następujących szeregów.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3n+1)(x-3)^n$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{5^n(n+1)}$, **(c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2+3n+2}$.

Zadanie 11. *Obliczyć sumy szeregów.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n+2)}{7^n}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n2^n}$.

Zadanie 12. *Rozwinąć w szereg Maclaurina następujące funkcje, podać zbiory punktów zbieżności otrzymanych szeregów i wyznaczyć podane pochodne.*

(a) $f(x)=\ln(x^2+4x+3)$, $f^{(15)}(0)$, **(b)** $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, $f^{(77)}(0)$, $f^{(88)}(0)$,

(c) $f(x)=x\sinh x$, $f^{(n)}(0)$, $n=0,1,\ldots$.

Zadanie 13. *Rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu* $x_0=1$ *funkcję* $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-x-6}$, *podać zbiór punktów zbieżności otrzymanego szeregu i obliczyć* $f^{(100)}(1)$.

Zadanie 14. *Pokazać, że*

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0 & \text{gdy } x=y\\ |x|+|y| & \text{gdy } x\neq y\end{cases}$$

jest metryką w $\mathbb{R}$ *(jest to metryka policyjna - aby przemieścić się z punktu* x *do* y *trzeba najpierw uzyskać przepustkę w punkcie* 0, *w którym jest posterunek policji). Wyznaczyć kulę* $K(0,2)$, $K(3,2)$ *i* $K(3,4)$ *w tej przestrzeni. Czy ciągi* $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=1-\frac{1}{n}$ *są zbieżne w tej przestrzeni? Podać przykład ciągu zbieżnego do* 1 *w tej przestrzeni. Czy zbiory* $A=\mathbb{N}$ *i* $B=\mathbb{N}\cup\{0\}$ *są zbiorami otwartymi w tej przestrzeni?*

Zadanie 15. *Niech* (X,d) *będzie przestrzenią metryczną. Sprawdzić, że* (X,d_1), *gdzie*

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

też jest przestrzenią metryczną. Jakie zbiory są ograniczone w (X,d_1)*?*

Zadanie 16. *Oznaczmy przez d_1 metrykę euklidesową w $\mathbb{R}$, a przez d_2 metrykę dyskretną w $\mathbb{R}$. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ określamy metrykę:*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2).$$

Narysować kulę otwartą $K((1, 2), \frac{1}{2})$ i kulę domkniętą $\overline{K}((-1, 0), 1)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d)$. Czy ciąg $(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ jest zbieżny w tej przestrzeni? Jeśli tak, to jaka jest jego granica?

Zadanie 17. *Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Czy prawdziwe są następujące implikacje*

$$a) \quad (\forall_\alpha \ A_\alpha \text{ jest zbiorem domkniętym }) \implies \bigcup_\alpha A_\alpha \text{ jest domknięty,}$$

$$b) \quad (\forall_\alpha \ A_\alpha \text{ jest zbiorem domkniętym }) \implies \bigcap_\alpha A_\alpha \text{ jest domknięty ?}$$

Zadanie 18. * *Niech $n \in \mathbb{N}$, (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech $f : X \mapsto X$. Wykazać, że jeśli $F(x) = f(f(\ldots f(x)))$ (tj n-krotne złożenie f) jest odwzorowaniem zwężającym to f ma dokładnie jeden punkt stały.*

Zadanie 19. *Sprawdzić, czy funkcja $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ spełnia w przedziale $[0, +\infty)$ założenia twierdzenia Banacha.*

ODPOWIEDZI:

1. szeregi zbieżne: (a), (b), (c), (e), (h), (j), (k), (l), (o); pozostałe szeregi są rozbieżne
WSKAZÓWKI: **(i)** $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; **(j)** $\sin x < x$ dla $x > 0$; **(o)** można zastosować kryterium całkowe

2. (a) tak - udowodnić, nie - podać kontrprzykład

3. (a) $\alpha > 1$ (b) $\alpha < 2$

4. (a) nie (zbieżny bezwzględnie) (b) tak (c) nie (rozbieżny) (d) nie (zbieżny bezwzględnie) (e) tak (f) nie (rozbieżny)

5. Oznaczmy $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, wtedy
(a) $f(x) = 0$, $\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{ne} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, więc zbieżność jest jednostajna,
(b) $f(x) = 0$, $\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, więc zbiega jednostajnie,
(c) $f(x) = x$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, więc zbieżność jest jednostajna,
(d) $f(x) = 0$, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 0$, więc zbieżność nie jest jednostajna,
(e) $f(x) = 0$, $\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| = na(1 - a)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, więc zbiega jednostajnie,
(f) $f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases}$, $\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \infty$, więc nie zbiega jednostajnie,
(g) $f(x) = 0$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \operatorname{arctg}\frac{1}{n\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, więc zbiega jednostajnie.

6. (a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \ \left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ i skorzystać z kryterium Weierstrassa (b) analogicznie jak (a)

7. Skorzystać z kryterium Weierstrassa.

8. (a) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (b) $\{0\}$ (c) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (d) $[-2, 2)$ (e) $[-2, 4)$ (f) $[-1, 1)$ (g) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
(h) podstawić $y = (x - 1)^2$, $y \in [-2, 2] \ \Rightarrow \ x \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$
(i) podstawić $y = \frac{2x+1}{x}$, $y \in (-1, 1) \ \Rightarrow \ x \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$

9. (a) $R = 27$, szereg jest rozbieżny w obu końcach przedziału zbieżności (bo nie spełnia tam warunku koniecznego zbieżności)
(b) $R = \sqrt{e}$, szereg jest rozbieżny w obu końcach przedziału zbieżności (bo nie spełnia tam warunku koniecznego zbieżności)

10. (a) $\frac{(3-x)(1+x)}{(2-x)^2}$, $x \in (2, 4)$ (dla uproszczenia rachunków można podstawić $y = -x + 3$)
(b) $\begin{cases} -\frac{5}{x^2}\ln(1 - \frac{x^2}{5}), & x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) - \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ (można podstawić $y = \frac{x^2}{5}$)
(c) $\begin{cases} \frac{(1-3x)\ln(1-3x)+3x}{9x^2}, & x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) - \{0\} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x = \frac{1}{3} \end{cases}$ (można podstawić $y = 3x$)

WSKAZÓWKA: $\frac{y^n}{n^2+3n+2} = \frac{y^n}{(n+2)(n+1)}$

11. (a) $\frac{-77}{256}$ WSKAZÓWKA: Najpierw pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{3x-x^2}{(1-x)^3}, x \in (-1,1)$,
a następnie podstawić $x = -\frac{1}{7}$.
(b) $1 + 3\ln 2$ WSKAZÓWKA: Najpierw pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n} x^n = \frac{x}{1-x} - 3\ln(1-x)$,
$x \in (-1,1)$, a następnie podstawić $x = \frac{1}{2}$.

12. (a) $f(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n+1} - (\frac{-1}{3})^n] \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1)$, $f^{(15)}(0) = 14!(1+3^{-15})$
WSKAZÓWKA: $f'(x) = [\ln(x+1) + \ln(x+3)]' = \frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{x}{3})} = \ldots$
(b) $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^{2n-1} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$, $f^{(77)}(0) = 0$, $f^{(88)}(0) = 4^{87}$
WSKAZÓWKA: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$.
(c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+2}$, $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n\text{-nieparzyste lub } n = 0 \\ n, & n\text{-parzyste} \end{cases}$

13. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right)(x-1)^n,\ x \in (-1,3),\ f^{(100)}(1) = 100!\left(\frac{1}{3^{101}} - \frac{1}{2^{100}}\right)$

14. $K(0,2) = (-2,2)$, $K(3,2) = \{3\}$, $K(3,4) = \{3\} \cup (-1,1)$, $a_n \to 0$, b_n nie jest zbieżny, ciągi zbieżne do 1 to ciągi, które prawie wszystkie wyrazy mają równe 1, A jest otwarty, B nie jest.

15. Wskazówka: Dla $0 \leq a \leq b$ mamy $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$, bo $f(t) = \frac{t}{1+t}$ jest funkcją rosnącą dla $t > 0$.
W przestrzeni (X, d_1) każdy zbiór jest ograniczony.

16. $K((1,2), \frac{1}{2}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 \ \wedge |x-1| < \frac{1}{2}\}$,
$\overline{K}((-1,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \ \wedge |x+1| \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \ \wedge x = -1\}$.
Ciąg nie jest zbieżny w tej przestrzeni.

17. a) Nie musi być prawdziwa (trzeba podać kontrprzykład).
b) Tak - aby to pokazać można skorzystać z praw de Morgana i zadania 8 z serii 6 z ćwiczeń.

18. Z zasady Banacha wynika, że F ma dokładnie jednen punkt stały. Jeśli x_0 jest punktem stałym dla F, to $\rho(f(x_0), x_0) = \rho(f(F(x_0)), F(x_0)) = \rho(F(f(x_0)), F(x_0))$. Z tego, że F jest zwężające otrzymujemy $\rho(f(x_0), x_0) = 0$, a zatem x_0 jest punktem stałym dla f.

19. Tak, spełnia, np z $L = \frac{1}{3}$.