Zadania domowe z Analizy Matematycznej II - część 3
(funkcje wielu zmiennych, całki podwójne i potrójne)

Zadanie 1. *Obliczyć granice lub wykazać, że nie istnieją.*

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^5}{2x^2+4y^2}$, **(b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^4+y^4}$, **(c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x}$,

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+2y-1}{x^2+4y^2-1}$, **(e)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2x+y)\sin\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, **(f)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$,

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$, **(h)** $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \left(\ln\frac{1}{|x^2-y-3|}\right)^{|x^2-y-3|}$.

Zadanie 2. *Zbadać ciągłość funkcji.*

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+2y^4} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$, **(b)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^3-y^3} & dla \quad x\neq y \\ 0 & dla \quad x=y \end{cases}$,

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)\cos x}{|x|+|y|} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Zadanie 3. *Czy uda się dobrać stałe a, $b \in \mathbb{R}$ tak aby poniższe funkcje był ciągłe w swoich dziedzinach? Jeśli tak, to wyznaczyć owe stałe.*

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \pi + \frac{\mathrm{tg}(xy)}{x} & dla \quad (x,y)\in\left[(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})\right]\times(-1,1) \\ a+y & dla \quad x=0 \ \ i \ \ y\in(-1,1) \end{cases}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ b & dla \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Zadanie 4. *Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji.*

(a) $f(x,y,z) = \sin x^2 \cdot \arcsin y - e^{\sin z}\cdot\cos^2 x + 3\mathrm{arctg}(x^2y)$ *dla* $(x,y,z)\in\mathbb{R}\times(-1,1)\times\mathbb{R}$,

(b) $f(x,y) = x^{\frac{2}{y}} - \log_{10}(xy^2)$ *dla* $x>0$ *i* $y\neq 0$,

(c) $f(x,y,z) = 1-\sqrt[5]{2+5\mathrm{arctg}(e^{xy}+\sin z)}$ *dla* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$, **(e)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-3y^2}{x-y} & dla \quad x\neq y \\ 0 & dla \quad x=y \end{cases}$,

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y+1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & dla \quad (x,y)\neq(0,1) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,1) \end{cases}$.

Zadanie 5. *Obliczyć pochodne cząstkowe $f'_x(0,0)$ oraz $f'_y(0,0)$ jeśli*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-2y)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Zadanie 6. *Dana jest funkcja* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

(a) *Wyznaczyć pochodną kierunkową w punkcie $(1,0)$ w kierunku wektora (h_x,h_y).*

(b) *Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x,y)$.*

Zadanie 7. *Zbadać różniczkowalność następujących funkcji.*

(a) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, **(b)** $f(x,y) = \begin{cases} x+\frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & dla \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Zadanie 8. *Wykazać, że powierzchnia o równaniu $z = x\arcsin\frac{y}{x+y}$ posiada płaszczyznę styczną w punkcie $(1,1,z_0)$. Napisać równanie tej płaszczyzny.*

Zadanie 9. *Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego następujących funkcji.*

(a) $f(x,y) = \sqrt{5x^4 + y^8}$, **(b)** $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y^2}{x}$ *dla* $x \neq 0$.

Zadanie 10. *Niech* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *ma ciągłe pochodne cząstkowe* f'_x *oraz* f'_y. *Obliczyć*

(a) $g'(t)$ *jeśli* $g = f(x,y)$ *oraz* $x = t\ln(1+t^2)$, $y = e^{-t}$,

(b) *pochodne cząstkowe funkcji* $h(s,w)$ *jeśli* $h = f(x,y)$, $x = e^s\cos w$, $y = e^s\sin w$,

(c) *pochodne cząstkowe funkcji* $z(r,p) = f(r-3p, 2r+5p)$.

Zadanie 11. *Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji*

(a) $f(x,y) = e^{3x-2y}(3x^2 - y^2)$ **(b)** $f(x,y) = y^2 + 3x^2y - x^3y$

(c) $f(x,y) = -8x^3 + y^3 - 24xy - 4$ **(d)** $z = 24xy - 2x^2y - 4xy^2$

(e) $f(x,y) = 3x^8 + 3y^8 + 8x^3y^3$ **(f)** $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Zadanie 12. *Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji*

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ *w kole* $x^2 + y^2 \leq 4$,

(b) $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - y + 1$ *w trójkącie* $x \geq 0,\ x+y \leq 2,\ x-y \leq 2$.

Zadanie 13. *Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej* $y = y(x)$ *spełniającej równanie*

(a) $x^2 + 2xy + y^2 - 4y - \dfrac{1}{4} = 0$, **(b)** $y^4 - 8xy - 4y + 8x^2 = 0$.

Zadanie 14. *Obliczyć całki*

(a) $\displaystyle\iint_A \mathrm{e}^{-y^2}\,dxdy$, *gdzie* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq y \leq 5\}$;

(b) $\displaystyle\iint_B xy^2 dxdy$, *gdzie* B *jest trójkątem o wierzchołkach* $(-1,0), (1,0), (0,1)$;

(c) $\displaystyle\iint_C (4xy-1)dxdy$, *gdzie* C *to obszar zawarty pomiędzy liniami* $x+y=1, y=3-x^2, y=0$ $\big((0,1/2) \in C\big)$;

(d) $\displaystyle\iint_D \frac{6yx^2}{x^2+y^2}dxdy$, *gdzie* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq -x\}$;

(e) $\displaystyle\iint_E \sqrt{x^2+4y^2}dxdy$, *gdzie* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \dfrac{x^2}{4}+y^2 \leq 1\}$.

Zadanie 15. *Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami:* $x^2+y^2 = 2x,\ x^2+y^2 = 4x,\ y = 0,\ y = x$.

Zadanie 16. *Używając całki podwójnej, obliczyć pole powierzchni figury ograniczonej linią* $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$.

Zadanie 17. *Obliczyć objętość obszaru leżącego wewnątrz sfery* $x^2+y^2+z^2 = R^2$ *i wewnątrz walca* $x^2+y^2 = a^2$ *jeśli* $0 < a < R$.

Zadanie 18. *Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami* $x^2+y^2 = 2y$, $z^2 = x^2+y^2$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

Zadanie 19. *Obliczyć masę bryły* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + 25y^2 \leq 100, y \geq 0\}$ *wiedząc, że gęstość jest proporcjonalna do kwadratu odległości od osi* OX.

Zadanie 20. *Wyznaczyć współrzędne środka masy półkola o promieniu* R *i o gęstości wprost proporcjonalnej do odległości od średnicy.*

Zadanie 21. *Obliczyć całki*

(a) $\displaystyle\iiint_A \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, *gdzie* A *to czworościan:* $x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;

(b) $\displaystyle\iiint_B (x^2+y^2)dxdydz$, *gdzie* B *to obszar ograniczony powierzchniami:* $x^2+y^2 = 2z, z = 2$;

(c) $\displaystyle\iiint_C (x^2+y^2)dxdydz$, *gdzie* $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9$ *i* $z \leq 0\}$.

Zadanie 22. *Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami*

(a) $z = 6 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$; **(b)** $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2},\ z = x^2 + y^2$.

ODPOWIEDZI:

1. (a) 0, WSKAZÓWKA: dla $y \neq 0$, $0 \leq |\frac{3xy^5}{2x^2+4y^2}| \leq \frac{|3xy^5|}{y^2} = 3|xy^3|$

(b) nie istnieje: $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ i $\frac{x_n^2}{x_n^4+y_n^4} = 0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ i $\frac{\tilde{x}_n^2}{\tilde{x}_n^4+\tilde{y}_n^4} = \frac{1}{2}n^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

(c) nie istnieje: $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ i $\frac{x_n^2-y_n^2}{x_n} = 0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ i $\frac{\tilde{x}_n^2-\tilde{y}_n^2}{\tilde{x}_n} = \frac{1}{n^2} - 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$

(d) nie istnieje: $(x_n, y_n) = (1, \pm\frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1,0)$ i $\frac{x_n+2y_n-1}{x_n^2+4y_n^2-1} = \pm\frac{1}{2}n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$

(e) 0, WSKAZÓWKA: $0 \leq |(2x+y)\sin\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq |2x+y|$ (f) 0, $0 \leq |\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}| \leq |\frac{x^3}{x^2+y^2}| + |\frac{y^3}{x^2+y^2}| \leq |x| + |y|$

(g) 0, WSKAZÓWKA: Podstawiając $t = x^2 + y^2$, granicę sprowadzimy do granicy funkcji jednej zmiennej $\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\ln t$, którą można obliczyć korzystając z twierdzenia de l'Hôspitala.

(h) 1, WSKAZÓWKA: Podstawiając $t = |x^2 - y - 3|$, granicę sprowadzimy do granicy funkcji jednej zmiennej $\lim_{t\to 0^+} \left(\ln\frac{1}{t}\right)^t$, którą można obliczyć korzystając z tożsamości $a^b = e^{b\ln a}$ i z twierdzenia de l'Hôspitala.

2. (a) Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}^2$, WSKAZÓWKA: dla $x \neq 0$, $0 \leq |\frac{x^3}{x^2+2y^4}| \leq |\frac{x^3}{x^2}| = |x|$.

(b) Funkcja jest ciągła jedynie na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = y\}$. Nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$, bo nie istnieje $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, ponieważ $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ i $f(x_n, y_n) = 0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ oraz $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ i $f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{n(n+1)}{3n^2+3n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.

Nie jest ciągła w żadnym punkcie (x_0, x_0), gdzie $x_0 \neq 0$, bo nie istnieje skończona granica $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x,y)$: $(x_n, y_n) = (x_0, x_0 + \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x_0, x_0)$ i $f(x_n, y_n) = \frac{nx_0^4+3x_0^3+\frac{1}{n}x_0^2}{-3x_0^2-3x_0\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(c) Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}^2$, WSKAZÓWKA: $0 \leq |\frac{(x^2+y^2)\cos x}{|x|+|y|}| \leq \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \frac{x^2}{|x|+|y|} + \frac{y^2}{|x|+|y|} \leq |x| + |y|$.

3. (a) Tak, $a = \pi$, bo $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \pi + \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\sin(xy)}{xy} y \frac{1}{\cos(xy)} = \pi + 1\cdot y_0 \cdot 1 = \pi + y_0 = f(0, y_0) = = a + y_0$. (b) Tak, $b = 2$, bo dla $x \neq 0$, $2 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} + 2 \leq \frac{x^2y^2}{x^2} + 2 = y^2 + 2$.

4. (a) $f'_x = 2x\cos x^2 \arcsin y + e^{\sin z}\sin 2x + \frac{6xy}{1+x^4y^2}$, $f'_y = \frac{\sin x^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{3x^2}{1+x^4y^2}$, $f'_z = -\cos^2 x \cos z e^{\sin z}$

(b) $f'_x = \frac{2}{y}x^{\frac{2}{y}-1} - \frac{1}{x\ln 10}$, $f'_y = \frac{-2\ln x}{y^2}x^{\frac{2}{y}} - \frac{2}{y\ln 10}$, WSKAZÓWKA: $f(x,y) = e^{\frac{2}{y}\ln x} - \frac{\ln(xy^2)}{\ln 10}$

(c) $f'_x = \frac{-ye^{xy}}{[1+(e^{xy}+\sin z)^2]\sqrt[5]{[2+5\mathrm{arctg}(e^{xy}+\sin z)]^4}}$, $f'_y = \frac{-xe^{xy}}{[1+(e^{xy}+\sin z)^2]\sqrt[5]{[2+5\mathrm{arctg}(e^{xy}+\sin z)]^4}}$,

$f'_z = \frac{-\cos z}{[1+(e^{xy}+\sin z)^2]\sqrt[5]{[2+5\mathrm{arctg}(e^{xy}+\sin z)]^4}}$

(d) $f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{2x[y(x^2+y^2)\cos(x^2y)-\sin(x^2y)]}{(x^2+y^2)^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+y^2)\cos(x^2y)-2y\sin(x^2y)}{(x^2+y^2)^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+3y^2-2xy}{(x-y)^2} & \text{dla } x \neq y \\ 1 & \text{dla } x = y = 0 \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } x = y \neq 0 \end{cases}$, $f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+3y^2-6xy}{(x-y)^2} & \text{dla } x \neq y \\ 3 & \text{dla } x = y = 0 \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } x = y \neq 0 \end{cases}$

(f) $f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4+3x^2(y-1)^2+x(y-1)}{[x^2+(y-1)^2]^{3/2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,1) \end{cases}$, $f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{-x^2-x^3(y-1)}{[x^2+(y-1)^2]^{3/2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,1) \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } (x,y) = (0,1) \end{cases}$

5. $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0)$ nie istnieje

6. (a) $D_{(h_x,h_y)}(1,0) = 0$

(b) Funkcja f jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$. Jej różniczkowalność poza punktem $(0,0)$ wynika stąd, że poza punktem $(0,0)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe. Natomiast w punkcie $(0,0)$ jest różniczkowalna, ponieważ $\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{f(h_x,h_y)-f(0,0)-f'_x(0,0)h_x-f'_y(0,0)h_y}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} = \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{\sin(h_xh_y^3)}{h_x^2+h_y^2} = \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{\sin(h_xh_y^3)}{h_xh_y^3}\frac{h_xh_y^3}{h_x^2+h_y^2} = = 0$, bo $\frac{\sin(h_xh_y^3)}{h_xh_y^3} \to 1$ i, dla $h_y \neq 0$, $|\frac{h_xh_y^3}{h_x^2+h_y^2}| \leq |\frac{h_xh_y^3}{h_y^2}| = |h_xh_y|$ oraz $|h_xh_y| \to 0$.

7. (a) $f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} & \text{dla} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(x,0) \\ \text{nie istnieje} & \text{dla} \quad (x,y)=(0,y) \text{ i } y \neq 0 \end{cases}$ $f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} & \text{dla} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,y) \\ \text{nie istnieje} & \text{dla} \quad (x,y)=(x,0) \text{ i } x \neq 0 \end{cases}$

Funkcja ta jest różniczkowalna w każdym punkcie postaci (x,y), gdzie $xy \neq 0$, bo pochodne cząstkowe są ciągłe w takim punkcie. Funkcja nie jest różniczkowalna w punktach postaci $(x,0)$ i $(0,y)$, gdzie $x \neq 0$ i $y \neq 0$, bo w tych punktach nie istnieje jedna z pochodnych cząstkowych. Funkcja nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, bo nie istnieje granica $\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{f(h_x,h_y)-f(0,0)-f'_x(0,0)h_x-f'_y(0,0)h_y}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} = \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_x h_y}}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}}$. Aby pokazać, że powyższa granica nie istnieje można rozpatrzyć ciągi $(\frac{1}{n},0)$ oraz $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$.

(b) Funkcja ta jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$. Wyjaśnienie:

$f'_x(x,y) = \begin{cases} 1+\frac{2x^4+3x^2y^2-xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^4+3x^2y^2-x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Funkcja ta jest różniczkowalna poza punktem $(0,0)$, bo ma tam ciągłe pochodne cząstkowe. Funkcja jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, ponieważ

$\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{f(h_x,h_y)-f(0,0)-f'_x(0,0)h_x-f'_y(0,0)h_y}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} = \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{h_x^3+h_y^3}{h_x^2+h_y^2} = \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} [\frac{h_x^3}{h_x^2+h_y^2}+\frac{h_y^3}{h_x^2+h_y^2}] = 0$,

bo $|\frac{h_x^3}{h_x^2+h_y^2}+\frac{h_y^3}{h_x^2+h_y^2}| \leq |\frac{h_x^3}{h_x^2+h_y^2}|+|\frac{h_y^3}{h_x^2+h_y^2}| \leq |h_x|+|h_y| \to 0$.

8. Funkcja $f(x,y) = x\arcsin\frac{y}{x+y}$ jest różniczkowalna w punkcie $(1,1)$, bo ma w tym punkcie ciągłe pochodne cząstkowe: $f'_x(x,y) = \arcsin\frac{y}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2\sqrt{1-(\frac{y}{x+y})^2}}$, $f'_y(x,y) = = \frac{x^2}{(x+y)^2\sqrt{1-(\frac{y}{x+y})^2}}$. Różniczkowalność funkcji f w punkcie $(1,1)$ oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(1,1,\frac{\pi}{6})$. Równanie szukanej płaszczyzny stycznej: $(\sqrt{3}-\pi)x-\sqrt{3}y+6z=0$.

9. (a) $f''_{xx}(x,y) = \begin{cases} \frac{50x^6+30x^2y^8}{(5x^4+y^8)^{3/2}} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 2\sqrt{5} & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $f''_{yy}(x,y) = \begin{cases} \frac{140x^4y^6+12y^{14}}{(5x^4+y^8)^{3/2}} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \begin{cases} \frac{-40x^3y^7}{(5x^4+y^8)^{3/2}} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(b) $f''_{xx} = \frac{2xy^2}{(x^2+y^4)^2}$, $f''_{yy} = \frac{2x^3-6xy^4}{(x^2+y^4)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{2y^5-2x^2y}{(x^2+y^4)^2}$,

10. (a) $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f'_x\cdot[\ln(1+t^2)+\frac{2t^2}{1+t^2}] - f'_y\cdot e^{-t}$

(b) $\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = f'_x\cdot e^s\cos w + f'_y\cdot e^s\sin w$, $\frac{\partial h}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = -f'_x\cdot e^s\sin w + f'_y\cdot e^s\cos w$

(c) $\frac{\partial z}{\partial r} = f'_x+2f'_y$, $\frac{\partial z}{\partial p} = -3f'_x+5f'_y$

11. (a) $(0,0)$ - brak ekstremum, $f_{min}(2,4) = -\frac{4}{e^2}$,

(b) $(3,0)$ - brak ekstremum, $f_{min}(2,-2) = -4$,

$(0,0)$ - brak ekstremum, bo $f(0,\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} > f(0,0) = 0$ i $f(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{-1}{n}) = \frac{-1}{n^2}(2-\frac{1}{\sqrt{n}}) < f(0,0) = 0$

(c) $(0,0)$ - brak ekstremum, $f_{max}(2,-4) = 60$ (d) $(0,0),(12,0),(0,6)$ - brak ekstremów, $z_{max}(4,2) = 64$

(e) $f_{min}(1,-1) = f_{min}(-1,1) = -2$,

$(0,0)$ - brak ekstremum, bo $f(0,\frac{1}{n}) = \frac{3}{n^8} > f(0,0) = 0$ i $f(\frac{1}{n},\frac{-1}{n}) = \frac{2}{n^6}(\frac{3}{n^2}-4) < f(0,0) = 0$

(f) $(0,0,-1)$ - brak ekstremum, $f_{min}(24,-144,-1) = -6913$

12. (a) wartość największa= 8, wartość najmniejsza= -1 (b) wartość największa= 7, wartość najmniejsza= 0

13. (a) $y_{min}\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{16}$ (b) $y_{max}(1) = 2$, $y_{min}(0) = 0$

14. (a) $\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-25})$ (b) 0 (c) $\int_0^2 \left[\int_{-\sqrt{3-y}}^{1-y}(4xy-1)dx\right]dy = -\frac{14}{3}-2\sqrt{3}$

(d) $\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\left[\int_1^2 \frac{6r\sin\varphi r^2\cos^2\varphi r}{r^2}dr\right]d\varphi = \frac{7\sqrt{2}}{3}$ (e) $\frac{8\pi}{3}$ **15.** $3(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})$ **16.** a^2

17. $2\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \sqrt{R^2-r^2}rdr\right)d\varphi = \frac{4\pi}{3}\left(R^3-\sqrt{(R^2-a^2)^3}\right)$, gdzie $D = \{(x,y): x^2+y^2 \leq a^2\}$

18. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = 2\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\sin\varphi} r^2dr\right)d\varphi = \frac{32}{9}$, gdzie $D = \{(x,y): x^2+(y-1)^2 \leq 1\}$

19. $5k\pi$ **20.** $x_C = 0$ (z symetrii), $y_C = \frac{3}{16}\pi R$, $(m = \frac{2}{3}kR^3)$ Tutaj k oznacza współczynnik proporcjonalności.

21. (a) $\ln\sqrt{2}-\frac{5}{16}$ (b) $\frac{16}{3}\pi$ (c) $\frac{968}{15}\pi$

22. (a) $|V| = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\left(\int_r^{6-r^2} rdz\right)dr\right]d\varphi = \frac{32}{3}\pi$ (b) $|V| = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} rdz\right)dr\right]d\varphi = \frac{1}{6}\pi(8\sqrt{2}-7)$