Egzamin z AM II - część teoretyczna

Wymagana jest znajomość wszystkich zagadnień omawianych na wykładzie (w szczególności definicji i twierdzeń) w ciągu całego semestru (wraz z ostatnim wykładem z semestru zimowego dotyczącym pojedynczej całki Riemanna). Wskazana jest umiejętność podawania przykładów.
Ponadto wymagane będą dowody następujących twierdzeń i faktów:

1) Wzór na całkowanie przez części dla całki Riemanna.
2) Wzór na całkowanie przez podstawienie dla całki Riemanna.
3) Podstawowy warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego.
4) Kryterium Leibniza (z wykorzystaniem kryterium Dirichleta).
5) Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej jest równoważny zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego.
6) Kryterium Weierstrassa.
7) Jeśli f jest sumą pewnego szeregu potęgowego w otoczeniu punktu x_0, to szereg ten jest szeregiem Taylora funkcji f.
8) Ciąg zbieżny o wyrazach w dowolnej przestrzeni metrycznej ma tylko jedną granicę.
9) Zbiór wyrazów ciągu zbieżnego, określonego w dowolnej przestrzeni metrycznej, jest ograniczony.
10) Warunek konieczny różniczkowalności funkcji wielu zmiennych.
11) Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych.

Przykładowy egzamin z części teoretycznej - zestaw 1

1. Podać definicję minimum lokalnego funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Sformułować warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych.
Czy funkcja $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4} + 1$ ma w punkcie $(0, 0)$ ekstremum lokalne? Odpowiedź dokładnie uzasadnić.
2. Napisać definicję szeregu Maclaurina dla funkcji f.
Podać wzór na rozwinięcie funkcji $f(x) = \sin x$ w szereg Maclaurina i zbiór x-ów, dla których wzór ten jest prawdziwy.
3. Sformułować kryterium Dirichleta zbieżności szeregu liczbowego. Wyprowadzić z niego kryterium Leibniza.
4. Podać definicję pochodnej cząstkowej względem pierwszej zmiennej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ w punkcie (x_0, y_0). Czy funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

ma pochodną cząstkową $f'_x(1, 0)$? Odpowiedź uzasadnić.
5. Podać definicję zbieżności ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach w przestrzeni metrycznej (X, ρ).
Czy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n}$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, \rho)$, gdzie ρ to metryka dyskretna? Odpowiedź uzasadnić.

Przykładowy egzamin z części teoretycznej - zestaw 2

1. Podać i udowodnić wzór na całkowanie przez podstawienie dla całki Riemanna.

2. Sformułować kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregu liczbowego. Czy kryterium to rozstrzyga zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2+(-1)^n}{3}\right]^n$? Odpowiedź dokładnie uzasadnić.
3. Niech $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. Podać definicję (wersję Cauchy'ego i Heinego)

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} f(x,y,z)=a \overset{\text{C}}{\iff}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} f(x,y,z)=a \overset{\text{H}}{\iff}$$

4. Podać definicję pochodnej kierunkowej funkcji $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ w punkcie (x_0,y_0,z_0) w kierunku wektora $w=[w_1,w_2,w_3]$. Czy funkcja

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{gdy } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{gdy } (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

ma pochodną kierunkową w punkcie $(0,0,0)$ w kierunku wektora $w=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$?
5. Czy funkcja

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^n,\quad x\in(-1,1),$$

jest całkowalna na $[0,\frac{1}{2}]$? Jeśli tak, to wyznaczyć $\int_o^{\frac{1}{2}} f(x)dx$. Odpowiedź uzasadnić przytaczając odpowiednie twierdzenie.