Wykład 1: Własności całki Riemanna

Własność 1.1. Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna na $[a, b]$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to $\alpha f + \beta g$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ oraz $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

Własność 1.2. Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ jest zbiorem skończonym, to (f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b] \Leftrightarrow g$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$). Ponadto w przypadku całkowalności mamy $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Własność 1.3. Jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$, to f jest też całkowalna na każdym przedziale zawartym w $[a, b]$. Ponadto w przypadku całkowalności, jeśli $c \in (a, b)$, to $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Własność 1.4. Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ i $\forall_{x\in[a,b]}\ f(x) \geq 0$, to $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Własność 15. Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna na $[a, b]$ i $\forall_{x\in[a,b]}\ f(x) \leq g(x)$, to $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Własność 1.6. Jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$, to $|f|$ też jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ i $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Własność 1.7. Jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ i $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, to $\int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Definicja. Jeśli $-\infty < a < b < \infty$, to $\int_a^a f(x)dx := 0$ i $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$.

Własność 1.8 (Całkowanie przez podstawienie)**.**
Jeśli $g : [a, b] \to Y \subset \mathbb{R}$ jest klasy C^1 zaś $f : Y \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz $\alpha = g(a)$ i $\beta = g(b)$, to

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

Własność 1.9 (Całkowanie przez części)**.**
Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami klasy C^1, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Własność 1.10 (Twierdzenie o wartości średniej rachunku całkowego)**.**
Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ to funkcje ciągłe i g jest funkcją nieujemną lub niedodatnią, to

$$\exists_{\xi\in[a,b]} \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$